

**THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE
UNTERSUCHUNG DER ZEITLICHEN ENTWICKLUNG
DER MAGNETISCHEN INSTABILITÄT VON LICHTBÖGEN**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

H. G. HÜLSMANN

Bochum

1983

Bochum, im Dezember 1982

**THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE
UNTERSUCHUNG DER ZEITLICHEN ENTWICKLUNG
DER MAGNETISCHEN INSTABILITÄT VON LICHTBÖGEN**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

H. G. HÜLSMANN

Bochum

Bochum, im Dezember 1982

THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE
UNTERSUCHUNG DER ZEITLICHEN ENTWICKLUNG
DER MAGNETISCHEN INSTABILITÄT VON LICHTSTROMEN

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum



von

H. G. H O L S M A N N

Bochum

Dissertation eingereicht am: 14. 12. 1982

Tag der mündlichen Prüfung: 2. 2. 1983

Referent: Prof. Dr. rer. nat. J. Mentel

Koreferent: Prof. Dr.-Ing. K. Ragaller

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in der Arbeitsgruppe Grundlagen der Elektrotechnik am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Elektrooptik der Ruhr-Universität Bochum. Für die Anregung zu dieser Arbeit und die intensive Betreuung und Beratung bei ihrer Durchführung danke ich herzlich Herrn Prof. Dr. J. Mentel.

Den Mitarbeitern der beiden Lehrstühle für Allgemeine Elektrotechnik und Elektrooptik und für Allgemeine Elektrotechnik und Elektroakustik danke ich für die gute Zusammenarbeit, Herrn Prof. Dr. K. Ragaller vom BBC-Forschungszentrum in Baden/Schweiz für die Übernahme des Koreferates und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1.	Zusammenfassung	1
2.	Einleitung	3
3.	Experimentelle und theoretische Grundlagen der Untersuchung der magnetischen Instabilität von Bogenentladungen	5
4.	Quantitative zeitabhängige Stabili- tätstheorie für einen Lichtbogen in der Nähe der Stabilitätsgrenze bei Anwesenheit eines axialen Fremdmag- netfeldes	12
4.1.	Grundgleichungen und Vereinfachungen ..	12
4.1.1.	Leistungsbilanz	12
4.1.2.	Impulsbilanz	14
4.1.3.	Massenbilanz	15
4.1.4.	Zustandsgleichung	15
4.1.5.	Elektromagnetische Gleichungen	16
4.2.	Lösungsmethode	16
4.2.1.	Störansatz	17
4.2.2.	Bogenmodell	19
4.3.	Berechnung der Störgrößen	22
4.3.1.	Stromdichte	23
4.3.2.	Magnetfeld	24
4.3.2.1.	Axiales Fremdmagnetfeld	27
4.3.3.	Lorentzkraft	29
4.3.4.	Strömungsproblem	31
4.3.4.1.	Divergenz der Impulsbilanz	32

4.3.4.2.	Rotation der Impulsbilanz	33
4.3.4.3.	z-Komponente der Impulsbilanz	35
4.3.5.	Integration der Energiegleichung	39
4.3.5.1.	Approximation der Zeitableitung	40
4.3.5.2.	Berechnung des Wärmestrompotentials ...	43
4.3.6.	Randbedingungen	48
4.3.7.	Differentialgleichung für das Zeit- verhalten der Bogenauslenkung	54
4.3.8.	Berechnung der charakteristischen Determinante	56
4.4.	Ergebnisse der Theorie und Vergleich mit dem Experiment	57
4.4.1.	Stabilitätsgrenzen	57
4.4.1.1.	Marginale Werte der Maeckerschen Zahl bei Anwesenheit eines zeitlich konstanten axialen Fremdmagnetfeldes ..	57
4.4.1.2.	Marginale Werte für ein zeitkonstan- tes axiales Fremdmagnetfeld	61
4.4.2.	Anwachsraten der Instabilität	67
4.4.2.1.	Anwachsraten ohne Fremdmagnetfeld	67
4.4.2.2.	Anwachsraten mit zeitkonstantem axialen Fremdmagnetfeld	69
4.4.2.3.	Anwachsraten mit zeitlich ver- änderlichem axialen Fremdmagnetfeld: Stabilisierungsmöglichkeit	73
4.5.	Erweiterung der Theorie durch die Einführung eines Mehrbereichsmodells für den Bogenquerschnitt	75
4.5.1.	Mehrbereichsmodell für den Bogen- querschnitt	76
4.5.2.	Mehrbereichslösungen der Impuls- bilanz	81

4.5.3.	Mehrbereichslösungen der Leistungs- bilanz	84
4.5.4.	Randbedingungen beim Mehrbereichs- modell	88
4.5.5.	Differentialgleichungssystem für das Zeitverhalten der Bogenauslenkung	94
4.5.6.	Ergebnisse der Mehrbereichsmodell- Theorie	97
4.5.6.1.	Stabilitätsgrenzen	98
4.5.6.2.	Anwachsraten	104
4.5.7.	Vergleich mit dem einfachen Bogen- modell	108
5.	Experimentelle Untersuchung der magnetischen Instabilität von Bogenentladungen	112
5.1.	Experimentelle Anordnung für die Messung der magnetfeldabhängigen Stabilitätsgrenzen	113
5.1.1.	Entladungsgefäß	113
5.1.2.	Gasversorgung	117
5.1.3.	Stromversorgung	118
5.1.4.	Magnetfelder und Einsatzpunkt der Wendelininstabilität	122
5.2.	Messung des kritischen Fremdmagnet- feldes und der kritischen Ganghöhe	124
5.3.	Experimentelle Anordnung für die Messung der Anwachsraten	126
5.3.1.	Bipolare, spannungsgesteuerte schnelle Stromquelle	127
5.3.2.	Elektrooptisches Helix-Meßgerät	129

5.3.3.	Regelsystem zur Stabilisierung des eigeninstabilen Lichtbogens	133
5.4.	Messung der Fremdmagnetfeld-abhän- gigen Anwachsrate Ω_B	144
5.5.	Messung der Anwachsrate Ω_O	149
6.	Schlußwort	151
7.	Anhang	152
7.1.	Thermische und elektrische Bogendaten .	152
7.2.	Reihenentwicklungen und abgeleitete Lösungen	156
7.3.	Symbole und Abkürzungen	161
8.	Literaturverzeichnis	164

1. Zusammenfassung

Bei Lichtbögen mit zylindersymmetrischen Randbedingungen bewirkt die magnetische Instabilität einen Übergang von der zylindrischen in eine helikale Bogenform der Ganghöhe λ mit einer Anwachsrate Ω , sobald die Entladungsparameter oder ein äußeres Magnetfeld bestimmte Grenzwerte überschreiten. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die bekannte zeitunabhängige lineare Störungstheorie für die quantitative Bestimmung des Einsatzpunktes und der Ganghöhe im Einsatzpunkt dieser Instabilität zu einer zeitabhängigen Theorie mit zusätzlicher Berücksichtigung eines axialen Fremdmagnetfeldes weiterentwickelt. Dabei wurde ein einfaches Kanalmodell für den Bogen benutzt. Darüber hinaus wurde die Theorie durch die Einführung eines Mehrbereichsmodells für den Bogenquerschnitt so erweitert, daß die Bedeutung der Näherungen für das einfache Kanalmodell geprüft und die Näherungen gerechtfertigt werden konnten.

Die zeitabhängige Theorie liefert quantitative Aussagen über 1. die marginalen Werte der Maeckerschen Zahl (für den Bogen charakteristische dimensionslose Zahl) mit und ohne axiales Fremdmagnetfeld, 2. die marginalen Werte für ein zeitkonstantes axiales Fremdmagnetfeld und 3. die Anwachsrate der Instabilität mit und ohne axiales Fremdmagnetfeld jeweils in Abhängigkeit von den Entladungsparametern und als Funktion von λ . Außerdem zeigt die Theorie die Möglichkeit einer Stabilisierung eines an sich instabilen Lichtbogens mit Hilfe eines schnell veränderlich geregelten axialen Fremdmagnetfeldes auf.

Zur quantitativen Prüfung der theoretischen Ergebnisse wurde ein Wasserstoff-Lichtbogen aufgebaut, an dem das kritische axiale Fremdmagnetfeld, das den Bogen an die Stabilitätsgrenze bringt, ebenso gemessen wurde wie die kritische Ganghöhe im jeweiligen magnetfeldabhängigen Einsatzpunkt der Instabilität. Durch elektrooptische Messung der schnell veränderlichen Bogen-

geometrie konnte die Anwachsrate der Instabilität bei momentanem Einschalten eines destabilisierenden Fremdmagnetfeldes gemessen werden, ebenso die Ganghöhe der anwachsenden-Bogenhelix.

Außerdem wurde ein Regelsystem für die Stabilisierung eines an sich instabilen Lichtbogens mit Hilfe eines schnell veränderlichen axialen Fremdmagnetfeldes realisiert. Der Lichtbogen kann mit dieser Regelkreis-Stabilisierung als zylindrische Bogensäule bei Stromstärken betrieben werden, die um bis zu 20% über dem Wert der Grenzstromstärke für das Einsetzen der Instabilität durch sein Eigenmagnetfeld liegen. Damit war es möglich, durch momentanes Austasten der Regelung auch im Bogenstrombereich oberhalb der Grenzstromstärke die Anwachsrate der Instabilität unverfälscht zu messen.

Sämtliche Meßergebnisse stimmen sehr gut mit den theoretischen Ergebnissen überein.

2. Einleitung

Sowohl frei brennende als auch wandstabilisierte Lichtbögen können durch ihr Eigenmagnetfeld instabil werden. In einem rohrförmigen Entladungsgefäß bildet der Lichtbogen bei niederer Stromstärke eine zylindersymmetrische Bogensäule. Für ein hinreichend weites Entladungsgefäß gibt es jedoch eine Grenzstromstärke, bei deren Überschreitung die zylindrische in eine Wendelform der Bogensäule übergeht.

Die Entstehung dieser Helix kann auf eine Verstärkung einer Störung der Zylindersymmetrie der Stromverteilung durch eine in Störungsrichtung angreifende resultierende Lorentzkraft zurückgeführt werden /1/, die sich aus der Wechselwirkung von Bogenstrom und Eigenmagnetfeld ergibt. Die weitere Entwicklung der Instabilität hängt von den Entladungsparametern wie Bogenstromstärke, Gasdruck, Gasart und Gefäßabmessungen ab.

Bei nur wenig über dem Grenzwert liegender Stromstärke stellt sich ein neuer stabiler Zustand für eine Bogenhelix mit endlicher Amplitude ein. Bei größerer Stromstärke wächst die Amplitude der Helix kontinuierlich an, bis zuletzt eine Art turbulenter Entladung entsteht. Der Bogen reißt dann entweder ab, weil sein Spannungsbedarf größer als die treibende Spannung wird, oder das Entladungsgefäß wird schließlich zerstört. Diese Vorgänge lassen sich durch ein axiales Fremdmagnetfeld noch zusätzlich beeinflussen.

Die magnetische Instabilität von Bogenentladungen, auch Wendelinstabilität genannt, ist sowohl für Schaltlichtbögen /2/ als auch für Hochdruckentladungslampen /3, 4/ von prinzipieller Bedeutung. Bei Schaltlichtbögen kann die magnetische Instabilität in der Löschphase die Wechselwirkung mit der Kaltgasströmung verstärken und so zur Bogenlöschung beitragen.

Bei Hochdruckentladungslampen stellt die Wendelinstabilität eine der Begrenzungen für eine Leistungssteigerung der Lampen dar. Die Ermittlung der Anwachsraten der magnetischen Insta-

bilität sowie die Untersuchung der Beeinflußbarkeit durch ein Fremdmagnetfeld ist daher von unmittelbar praktischem Interesse. Die theoretische Untersuchung der Bogeninstabilität und der Vergleich mit dem Experiment schafft die Voraussetzungen für vereinfachte Modellbildungen, wie sie für die Behandlung von Stabilitätsfragen bei der technischen Anwendung von Lichtbögen unentbehrlich sind.

Darüber hinaus ist die Untersuchung der magnetischen Instabilität von Bogenentladungen auch von übergreifender Bedeutung, weil sich hier die erfolgreiche quantitative Anwendung einer Stabilitätstheorie für das Gasentladungsgebiet in ähnlicher Weise zeigen läßt wie im Fall des Bénard-Problems für die Hydrodynamik (s. z. B. /5/). Daraus könnten sich z. B. nützliche Anregungen für die Behandlung von Fusionsplasmen mit ohmscher Heizung, die in starker Wechselwirkung mit den Wänden stehen, herleiten lassen.

Die vorliegende Arbeit verfolgte daher zwei Ziele: zum einen sollte die zeitunabhängige Theorie /1/ der magnetischen Lichtbogeninstabilität unter Einbeziehung eines axialen Fremdmagnetfeldes, welches zeitlich veränderlich sein darf, zu einer quantitativen zeitabhängigen Theorie weiterentwickelt werden, mit der sich die kritischen Fremdmagnetfeld-Werte und die Anwachsrate der Instabilität berechnen lassen. Darüber hinaus sollten einige relativ grobe modellmäßige Vereinfachungen der Theorie durch die Einführung eines Mehrbereichsmodells überprüft werden. Zum anderen sollten die theoretischen Ergebnisse für die kritischen Fremdmagnetfeld-Werte und die Anwachsrate der Instabilität experimentell überprüft werden. Außerdem sollte die Möglichkeit untersucht werden, einen an sich instabilen Lichtbogen durch ein zeitlich schnell veränderlich geregeltes axiales Fremdmagnetfeld zu stabilisieren, woraus sich dann auch eine Meßmethode für die Anwachsrate im Bogenstrombereich oberhalb der Grenzstromstärke ergeben sollte.

3. Experimentelle und theoretische Grundlagen der Untersuchung der magnetischen Instabilität von Bogenentladungen

Die magnetische Instabilität von Bogenentladungen ist seit langem von frei brennenden Lichtbögen her bekannt; das Wendeln eines Lichtbogens wurde zuerst beim Hochstromkohlebogen in Luft beobachtet /6/ und später näher untersucht /7/. Die gerade Bogensäule geht beim Überschreiten eines bestimmten Grenzwertes für den Bogenstrom in eine Helixform über, die sich von der punktförmigen Elektrode ausgehend zur flächenhaften Gegenelektrode hin aufweitet. Diese Raumspirale rotiert um ihre Figurenachse. Der Mechanismus dieser Bewegung konnte in /8/ geklärt werden.

Bei einer wandstabilisierten zylindersymmetrischen Bogenentladung mit sorgfältiger Abschirmung der Bogenfußpunkte (Gefäßverengung vor den Elektroden), senkrechtem Aufbau (weitgehende Vermeidung von Konvektionsströmungen, insbesondere in radialer Richtung) und ohne Kaltgasströmung entsteht oberhalb der Grenzstromstärke eine Bogenhelix mit axial konstanter Amplitude ohne Rotation /1/. Aufbauend auf der Beobachtung /9/, daß diese Wendelinstabilität im Gegensatz zu früheren Vermutungen ein reiner Säuleneffekt ist, wurde nun eine lineare zeitunabhängige Störungstheorie für die magnetische Instabilität von Lichtbögen entwickelt /1/. Mit ihr läßt sich die Einsatzstromstärke der Instabilität und die Ganghöhe der entstehenden Bogenhelix in Abhängigkeit von den Entladungsparametern (Gefäßradius, elektrische Bogendaten, Gaseigenschaften) quantitativ ermitteln. Die Ergebnisse solcher Rechnungen konnten durch Messungen an einem 400 mm langen wandstabilisierten Wasserstoff-Lichtbogen niederer Stromstärke (um 10 A), der in einem Bogengefäß von 18 mm $\varnothing$ bei Atmosphärendruck brannte, voll bestätigt werden /1/.

Die Theorie geht davon aus, daß die Form und die Lage des Lichtbogens hauptsächlich durch die Leistungsbilanz und ihre

Randbedingungen bestimmt werden. Als einfachstes Beispiel dafür wird die zylindrische Bogensäule in einem rohrförmigen Entladungsgefäß mit konstanter Wandtemperatur behandelt, wobei das Gefäßrohr näherungsweise als unendlich lang angesehen wird. Bei hinreichend großer Stromstärke bzw. Stromdichte stellt dann der zylindersymmetrische Bogen in der Rohrachse nur noch einen labilen Gleichgewichtszustand dar. Bei zylindersymmetrischer Stromverteilung wird im Bogeninnern durch die symmetrisch angreifenden $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kräfte (Abb. 1) ein Pinchdruck aufgebaut, so daß die entsprechenden Druckgradienten die Lorentzkräfte kompensieren.

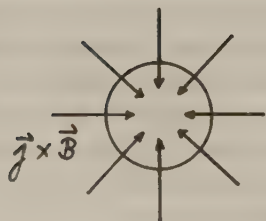
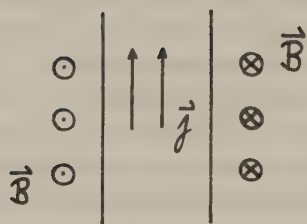


Abb. 1

Lorentzkräfte beim
ungestörten Bogen

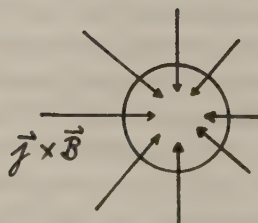
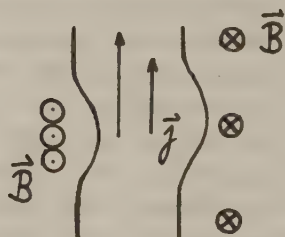


Abb. 2

Lorentzkräfte beim
gestörten Bogen

Bei einer Auslenkung aus der zylindrischen Stromverteilung (Abb. 2) wird dieses Gleichgewicht zerstört. Es entsteht eine resultierende Lorentzkraft, die eine Plasmaströmung relativ zum Temperaturfeld des ausgelenkten Bogens in Gang setzt, die das heiße Bogenplasma in das relativ kalte Gas zwischen der konvexen Außenseite der gekrümmten Bogensäule und der Gefäßwand hineinbläst, während auf der konkaven Innenseite gleichzeitig kaltes Gas in den heißen Bogenkern nachströmt. Diese Relativbewegung von Gasstrom und Bogenisothermen ergibt sich aus dem Zusammenspiel der beteiligten Kräfte und der thermischen Effekte: der heiße Gasstrom sucht das Kaltgas auf der Außenseite der Krümmung zu verdrängen, worauf aber die Reibung durch die Gaszähigkeit und, vor allem bei sehr schnellem Anwachsen der Störung, die Massenträgheit des dichten Kaltgases bremsend wirken; das heiße Gas kühlt durch die Wärmeabgabe an das Kaltgas nun selbst ab, so daß bei hinreichender Abkühlung schließlich seine elektrische Leitfähigkeit verschwindet. Auf der konkaven Innenseite, auf der die Erhöhung der elektrischen Feldstärke und der Stromdichte zu einer stärkeren elektrischen Leistungszufuhr als auf der Außenseite führen, frißt sich jedoch die elektrisch leitende Bogensäule gleichsam in das einströmende kältere Gas hinein: dieses wird zunächst durch Wärmeleitung bis zum Einsetzen der elektrischen Leitfähigkeit aufgeheizt, woraufhin seine Temperatur dann bei zusätzlicher ohmscher Heizung noch weiter ansteigt.

Einer zunehmenden Auslenkung des Bogens aus der Gefäßachse durch den konvektiven Wärmetransport in Störungsrichtung wirken daher nicht nur die bremsenden Reibungs- und Trägheitskräfte entgegen sondern auch die Wärmekapazität des Bogen-gases, das bei der Bogenbewegung laufend seine Temperatur ändern muß, sowie die asymmetrische ohmsche Heizung des gekrümmten Bogens und die asymmetrische Wärmeleitung beim aus der Gefäßachse ausgelenkten Bogen (stärkere Wärmeleitung

auf der konvexen, wandnäheren Krümmungsseite). Bei einer Bogenstromstärke oberhalb des Grenzwertes für die magnetische Stabilität überwiegen jedoch die destabilisierenden Effekte, und es bildet sich als instabile Mode mit der größten Anwachsrate die helikale $m=1$ -Mode aus.

Der Einsatzzpunkt der Instabilität und die Helix-Ganghöhe im Einsatzzpunkt werden in der linearen zeitunabhängigen Theorie mit Hilfe von Stabilitätsgrenzkurven für die nach Maecker benannte Zahl

$$Mk = \left(\partial h / \partial (1/s_m) \right)_p > \frac{\mu_0 I_B}{\eta E}$$

ermittelt. Die Maeckersche Zahl ist die für dieses Stabilitätsproblem charakteristische dimensionslose Zahl. Die über den Gefäßquerschnitt gemittelte Größe $(\partial h / \partial (1/s_m))_p$ stellt dabei ein Maß für die Enthalpie des Bogengases pro Volumeneinheit dar. Die marginalen Kurven für Mk ähneln den aus der Hydrodynamik bei Stabilitätsuntersuchungen an laminaren Strömungen üblichen Grenzkurven für die Reynoldszahl Re , bei denen Re über der Wellenlänge der Störung aufgetragen wird.

Die Lichtbogen-Stabilitätstheorie liefert Stabilitätsgrenzkurven in einer Ebene, die von Mk und der auf den Gefäßradius normierten Ganghöhe λ der Helix aufgespannt wird (Abb. 3). Die Theorie benutzt als wesentliche modellmäßige Vereinfachung ein Kanalmodell des Bogens, bei dem die Bogen säule durch einen Kanal konstanter elektrischer Leitfähigkeit approximiert wird. Die Lage der nach oben geöffneten parabelförmigen marginalen Kurven für Mk hängt deshalb vom Quotienten τ_e/R aus Kanal- und Gefäßradius ab, und zwar verschieben sich die Kurven mit wachsendem τ_e/R zu höheren Werten von Mk_g .

Jede dieser Kurven zerlegt die Ebene für einen bestimmten Wert von τ_e/R in einen Bereich positiver und einen Bereich

negativer Anwachsrate Ω für Störungen der zylindrischen Stromverteilung mit einer Ganghöhe λ . Das Minimum dieser Kurven

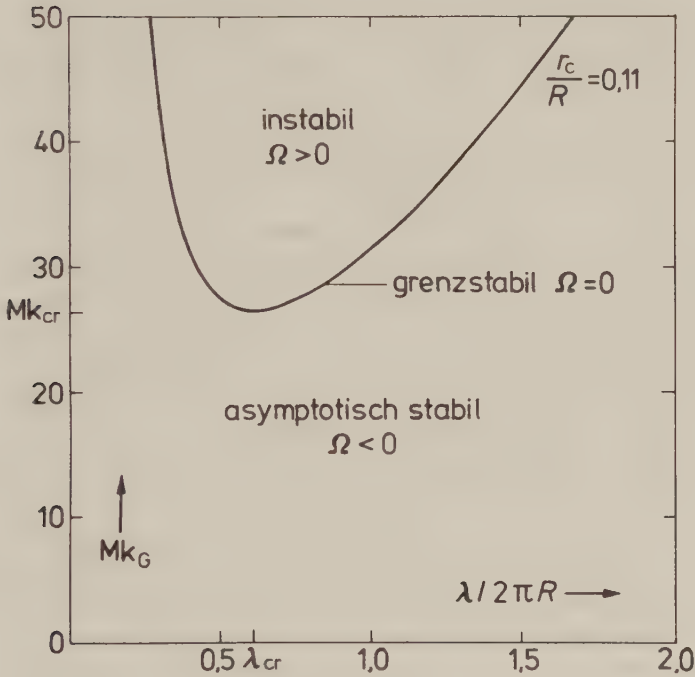


Abb. 3 Stabilitätsgrenzkurve (nach /1/); zur Definition der Stabilitätsbegriffe siehe z.B. /10/ oder /35/.

gibt daher die kritischen Werte für Mk und für λ an, bei denen der Bogen grenzstabil ist. Sobald der experimentell realisierte Wert der Maeckerschen Zahl den Wert Mk_{cr} überschreitet, wird der Bogen für eine Störung mit der Gang-

höhe λ_{cr} instabil: die Störung wächst dann mit einer Anwachsrate $\Omega > 0$ an. Die Anwachsrate selbst können jedoch mit der zeitunabhängigen Theorie nicht berechnet werden.

Mit Hilfe dieser Theorie wurde in /11/ die Abhängigkeit der Grenzstromstärke vom Gefäßquerschnitt und vom Gasdruck für den wandstabilisierten H_2 -Bogen in einem weiten Wertebereich berechnet und mit den experimentellen Befunden verglichen, wobei sich eine sehr gute Übereinstimmung ergab. Für einen N_2 -Bogen niederer Leistung, bei dem die Strahlung in der Energiebilanz noch vernachlässigbar ist, ließ sich die Theorie ebenfalls bestätigen. In /12/ wurde der Grenzfall sehr hoher Anwachsrate behandelt und auf einen Schaltlichtbogen angewandt; dabei wurden allein die Lorentzkraft und die Massenträgheit berücksichtigt, während die dissipativen Effekte unberücksichtigt blieben. In /13/ wurden mit Hilfe integraler Bilanzgleichungen die Anwachsrate der Lichtbogeninstabilität unter sehr allgemeinen Bedingungen qualitativ ermittelt; dabei wurden verschiedene Spezialfälle diskutiert, die für Schaltlichtbögen von Interesse sind. In /14/ und /15/ wurde mit Hilfe eines integralen Lorentzkraft-Ansatzes sowohl die destabilisierende Wirkung des Eigenmagnetfeldes des Lichtbogens als auch der Einfluß eines zeitkonstanten axialen Fremdmagnetfeldes auf die Wendelinstabilität qualitativ untersucht. In /16/ wurden die Ganghöhe und die Querschnittsform eines helikal verformten Niederstrom-Argonbogens bei Anwesenheit eines axialen Fremdmagnetfeldes ausgemessen. In /17/ wurden schließlich, aufbauend auf der linearen zeitunabhängigen Störungstheorie der magnetischen Lichtbogeninstabilität, die Grundzüge einer quantitativen zeitabhängigen Theorie für die Anwachsrate der Bogeninstabilität entwickelt.

Die wichtigsten Grenzfälle, die in /13/ und /17/ herausgearbeitet wurden, sind die des instabilen Bogens bei sehr

großer Stromstärke mit entsprechend hoher Anwachsrate, die dann im wesentlichen durch die Massenträgheit des Kaltgases bestimmt wird, und die des Niederstrombogens mit kleiner Anwachsrate, wobei die Massenträgheit vernachlässigt werden kann. In diesem Fall wird die Anwachsrate im wesentlichen durch das Verhältnis der zugeführten Leistung zum Energieinhalt des Bogens bestimmt. Bis jetzt lagen jedoch weder quantitative theoretische oder experimentelle Bestimmungen der Anwachsrate noch Untersuchungen über den Einfluß axialer Fremdmagnetfelder auf die Anwachsrate der magnetischen Instabilität vor.

Im folgenden wird über die Weiterentwicklung der zeitunabhängigen Theorie /1/ zu einer quantitativen zeitabhängigen Stabilitätstheorie des Lichtbogens unter Einbeziehung eines axialen Fremdmagnetfeldes berichtet, wobei einige Ansätze aus /17/ benutzt werden.

4. Quantitative zeitabhängige Stabilitätstheorie für einen Lichtbogen in der Nähe der Stabilitätsgrenze bei Anwesenheit eines axialen Fremdmagnetfeldes

Für die Stabilitätsuntersuchung werden die magnetohydrodynamischen Gleichungen in einer Form benutzt, wie sie für die Behandlung der dichten Bogenplasmen charakteristisch ist. Das Bogenplasma läßt sich durch ein Einflüssigkeitsmodell hinreichend genau beschreiben; Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht beim Niederstrombogen drücken sich durch eine Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit nicht nur von der Gasttemperatur sondern auch von der Feldstärke aus /1/. Die Maxwell-Gleichungen und das Ohmsche Gesetz können in elektrostatischer Näherung benutzt werden, weil die Zeitkonstanten der Bogenbewegung relativ groß sind (s. u.).

4.1. Grundgleichungen und Vereinfachungen

Die magnetohydrodynamischen Gleichungen für unsere Stabilitätsuntersuchung lassen sich in eine Form mit weitgehender Entkoppelung des Gleichungssystems bringen /1, 17/. Die dazu notwendigen Vereinfachungen der Theorie lassen sich experimentell ohne weiteres verwirklichen. Für die Experimente zur Prüfung der Theorie, die weiter unten beschrieben werden, wird ein Niederstrom-Wasserstoff-Lichtbogen bei Atmosphärendruck in einem Bogengefäß von 20 mm Durchmesser mit einer Bogenlänge von 20 cm eingesetzt, da für einen solchen Wasserstoffbogen vollständige Datensätze vorliegen /1/. Im folgenden werden zunächst die theoretischen Untersuchungen erläutert.

4.1.1. Leistungsbilanz

Die relativen Druckunterschiede sind bei unseren experimentellen Bedingungen so gering (s. u.), daß die Druckabhängigkeit der thermodynamischen Größen gegenüber ihrer

Temperaturabhängigkeit vernachlässigt werden kann. Wie in der Theorie des zylindrischen Lichtbogens üblich, kann daher anstelle der Temperatur T das Wärmestrompotential S als unabhängige Zustandsvariable verwendet werden: es gilt $ds/dT = \infty$. Auf diese Weise läßt sich die Wärmeleitfähigkeit eliminieren, weil ihre Druckabhängigkeit vernachlässigt werden kann.

Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes läßt sich dann die Leistungsbilanz

$$s_M \frac{dh}{dt} = \Delta S + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

für den Lichtbogen aufstellen. In der neuen zeitabhängigen Stufe der Theorie wird nun auch die lokale zeitliche Änderung $\partial h / \partial t$ der spezifischen Enthalpie bei der Bogenbewegung berücksichtigt ($dh/dt = \partial h / \partial t + \vec{v} \cdot \text{grad } h$).

Bei der Aufstellung der Leistungsbilanz konnte der Term dp/dt , der aus der Volumenarbeit resultiert, vernachlässigt werden, weil zum einen der Anteil $\vec{v} \cdot \text{grad } p$ wegen der geringen relativen Druckunterschiede in unserer Bogenentladung ($\Delta p/p < 10^{-4}$; $|1|$) unberücksichtigt bleiben kann und zum anderen die Bogenbewegung so langsam erfolgt, daß auch der Anteil $\partial p / \partial t$ verschwindend klein bleibt: Die Zeitkonstante τ , die sich aus dem Quotienten von Energieinhalt und Leistungszufuhr des Bogens bilden läßt und damit eine ungefähre untere Grenze für die Zeitkonstante der thermisch bestimmten Bogenbewegung darstellt, liegt bei unseren experimentellen Bedingungen um $2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$. Für $\partial p / \partial t$ läßt sich dann ein Wert in der Größenordnung von 1 W/cm^3 abschätzen, wohingegen z. B. die ohmsche Leistungszufuhr eine Größenordnung von 10^4 W/cm^3 hat. Wegen ihrer Geringfügigkeit kann ebenfalls die Reibungswärme unberücksichtigt bleiben.

Außerdem haben wir in der Leistungsbilanz die Emission und die Absorption von Strahlung vernachlässigt; dies stellt zwar eine wesentliche Einschränkung für den quantitativen Geltungsbereich der Theorie dar, in unserem Fall können wir die Strahlungsanteile in der Leistungsbilanz jedoch vernachlässigen (zum Einfluß der Strahlung vgl. z.B. /11/).

4.1.2. Impulsbilanz

Gasströmungen innerhalb und außerhalb des ungestörten Bogens bleiben unberücksichtigt, insbesondere die thermische Konvektion. Im Sonderfall einer Gasströmung in axialer Richtung mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit wird das Koordinatensystem mitbewegt. Die Abhängigkeit der Dichte und der Materialeigenschaften von den lokalen Druckunterschieden bleibt unberücksichtigt. Diese Näherungen sind gerechtfertigt, weil die Druckabhängigkeit der thermodynamischen Größen aufgrund der geringen Druckunterschiede (s. o.) gegenüber ihrer Abhängigkeit von der Temperatur, die sich in unserem Fall um eine Größenordnung über dem Bogenradius ändert (ca. 10^3 bis 10^4 K), vernachlässigt werden kann.

Die dann nur temperaturabhängige Viskosität wird durch einen konstanten Mittelwert η approximiert /1/, der nur von der Bogenleistung abhängt. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B} - \text{grad } p - \eta \text{rot} \text{rot} \vec{v} + \frac{4}{3} \eta \text{grad} \text{div} \vec{v} = 0.$$

Im Unterschied zur Hydrodynamik darf hier der zu $\text{grad} \text{div} \vec{v}$ proportionale Beitrag zur viskosen Reibung wegen der hohen Temperaturgradienten im Strömungsfeld nicht vernachlässigt werden. Ebenso muß hier natürlich der Druckgradient trotz

der nur geringen Druckunterschiede berücksichtigt werden, weil er die Gegenkraft zur Lorentzkraft darstellt (bei der Grundgleichung ohne Gasströmung verschwinden die anderen Terme, s. Gl. 4.3.4.(1)).

Den Trägheitsterm setzen wir gleich Null: der konvektive Beschleunigungsterm kann als quadratisches Störglied vernachlässigt werden (s. u.) und der Anteil $s_M \partial \vec{v} / \partial t$ spielt bei unseren Experimenten wegen der relativ geringen Bogenbeschleunigung in der Nähe der Stabilitätsgrenze keine Rolle. Er ist nur für Hochstromlichtbögen mit sehr großen Anwachsrate der Instabilität von Bedeutung und soll im Rahmen dieser Arbeit unberücksichtigt bleiben.

4.1.3. Massenbilanz

Der Satz von der Erhaltung der Masse liefert die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial s_M}{\partial t} + \operatorname{div}(s_M \vec{v}) = 0,$$

bei der nun ebenso wie in der Leistungsbilanz die lokale Zeitableitung berücksichtigt wird.

4.1.4. Zustandsgleichung

Die Druckabhängigkeit der Dichte kann wegen der nur geringen Druckunterschiede (s. o.) in unserer Bogenentladung gegenüber ihrer Temperaturabhängigkeit vernachlässigt werden. Es gilt $\Delta p \cdot \partial s_M / \partial p \ll \Delta T \cdot \partial s_M / \partial T$. Wir können daher die Dichte als alleinige Funktion der Gastemperatur bzw. des Wärmestrompotentials ansehen:

$$s_M = f(s) = \frac{a_M}{s + s_a}$$

Die reziproke Dichte kann dabei für H_2 nach /1/ in der angegebene Form als lineare Funktion von S mit den Konstanten α_M und S_a angenähert werden.

4.1.5. Elektromagnetische Gleichungen

Die Zeitableitungen in den Maxwellgleichungen können vernachlässigt werden, weil die Bogenbewegung in der Nähe der Stabilitätsgrenze relativ langsam verläuft. Eine Abschätzung unter Benutzung der Zeitkonstanten τ (s. o.) zeigt z. B., daß die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes (ca. 100 V/cm) einen um ca. 5 Größenordnungen kleineren Beitrag zur Rotation der magnetischen Induktion liefert als die Stromdichte. Ebenso kann die induzierte elektrische Feldstärke im Ohmschen Gesetz vernachlässigt werden, wie eine Abschätzung der magnetischen Reynoldszahl zeigt ($Re_m \leq 10^{-5} / 1$), so daß wir die folgenden Gleichungen anwenden können:

$$\vec{j} = -\sigma \text{ grad } V \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4)$$

4.2. Lösungsmethode

Das Verfahren zur Lösung der Gleichungen besteht im wesentlichen aus der Anwendung der linearen Störungstheorie auf unser Stabilitätsproblem, wobei die Rechnung durch die Einführung eines Kanalmodells für den Lichtbogen wesentlich vereinfacht wird /1/. Damit lassen sich dann die elektromagnetischen Gleichungen unabhängig von Massen-, Impuls- und Leistungsbilanz lösen. Die Bilanzgleichungen

führen auf ein System von 8 gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung (je 4 für den Innen- und für den Außenbereich bezüglich des stromführenden Bogenkanals), dessen Lösungen in analytischer Form angegeben werden können. Die Lösungen enthalten dann 16 noch unbestimmte Integrationskonstanten, von denen 4 wegen der Stetigkeit der Lösungen auf der Bogenachse verschwinden, und die Bogenauslenkung ϵ_c . Die Randbedingungen, denen die Lösungen genügen müssen, liefern dann ein lineares Gleichungssystem, das jedoch nicht für die Berechnung der Integrationskonstanten benutzt wird, sondern zur Aufstellung einer linearen Differentialgleichung für ϵ_c dient. Diese Gleichung entspricht einer ähnlichen Gleichung, die in /13/ aus integralen Ansätzen in qualitativer Form hergeleitet wurde. Unsere Gleichung wird nun die quantitative Berechnung der Stabilitätsgrenzen und der Anwachsraten der Instabilität ermöglichen.

Wegen der Zylindersymmetrie der Grundlösungen des Gleichungssystems 4.1.1. bis 4.1.5. verwenden wir für die Rechnungen ein zylindrisches Koordinatensystem (r, φ, z) .

4.2.1. Störansatz

Die Störungen $A_{(1)}$ der Grundlösungen $A_{(0)}$ lassen sich im allgemeinen Fall durch einen vollständigen Satz

$$A_{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m(r, k, t, \varphi, z) dk \quad (1)$$

mit

$$A_m = \hat{A}_m(r, k, t, \varphi, z) e^{i(m\varphi - kz)}$$

von Normalmoden A_m ausdrücken /18/. In unserer linearen Störungstheorie werden Störglieder von höherer als linearer Ordnung vernachlässigt, z. B.

$$(A_{(0)} + A_1 + A_{-1})^2 = A_{(0)}^2 + 2 A_{(0)} A_1 + 2 A_{(0)} A_{-1} \quad (2)$$

Dadurch sind die verschiedenen Moden voneinander entkoppelt, so daß jede Mode für sich untersucht werden kann. Experimentell wird in der Nähe der Stabilitätsgrenze nur eine helikale $m=+1$ - (Rechtsschraubensinn) oder eine helikale $m=-1$ - Mode (Linksschraubensinn der Bogenhelix) beobachtet. Sie ist demnach die instabile Mode mit der größten Anwachsrate; da außerdem die Linksschrauben-Helix und die Rechtsschrauben-Helix bei Abwesenheit eines Fremdmagnetfeldes physikalisch gleichwertig sind, beschränken wir uns auf die Berechnung der Rechtsschrauben-Helix, die durch einen Exponentialansatz mit

$$e^{i(\varphi - kz)} \equiv \text{Rechtsschraubensinn} \quad (3)$$

beschrieben wird. Die Ergebnisse der Rechnungen gelten dann sinngemäß auch für die Linksschrauben-Orientierung der Bogenhelix, wenn wir die Ausrichtung des axialen Fremdmagnetfeldes, das wir bei unserer Stabilitätsuntersuchung ebenfalls berücksichtigen wollen, relativ zu dieser Orientierung durch ein entsprechendes Vorzeichen berücksichtigen.

Wir gehen von den bekannten Lösungen $A_{(0)}$ für den stationären zylindersymmetrischen Bogen aus; für diese Lösungen gilt

$$\frac{\partial A_{(0)}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Außerdem soll der Bogen als unendlich lang angenommen werden, so daß die Gundlösungen nicht von der Achsenkoordinate abhängen:

$$\frac{\partial A_{(0)}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Die Amplituden $\hat{A}_m$ der Störungen enthalten die ganze Zeitabhängigkeit der Lösungen $A = A_{(0)} + A_{(1)}$ und hängen wegen Gl. (5) nicht von z ab. Der Störansatz für die Rechts-

schraubenhelix lautet dann

$$A(\tau, k, t, \varphi, z) = A_{(0)}(\tau) + \hat{A}_1(\tau, k, t) e^{i(\varphi - kz)} \quad (6)$$

mit $\lambda = 2\pi/k$; $0 \leq k \leq \infty$

λ ist die Ganghöhe der Helix, so daß k nicht negativ sein kann. Für die zylindersymmetrischen Grundlösungen $A_{(0)}$ schreiben wir im folgenden einfachheitshalber nur noch A_0 .

4.2.2. Bogenmodell

In die bekannten Grundlösungen A_0 geht als wesentliche Vereinfachung das Kanalmodell /1/ des Lichtbogens ein. Wir übernehmen diese Näherung für die zeitabhängige Theorie, werden aber auch einen Weg zur Überwindung dieser Einschränkung durch ein Mehrbereichsmodell aufzeigen (s. weiter unten). Das Experiment wird die Brauchbarkeit des Kanalmodells erweisen.

Die über den Bogenquerschnitt variable elektrische Leitfähigkeit σ wird durch eine konstante elektrische Leitfähigkeit σ_c für den Bereich $0 \leq r \leq r_c$ bei verschwindender Leitfähigkeit für $r > r_c$ ersetzt. Der Lichtbogen wird also durch einen elektrisch leitfähigen Kanal mit dem Radius r_c approximiert, außerhalb dessen das Bogengas als nichtleitend angesehen wird.

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_c & \text{für } 0 \leq r \leq r_c \\ 0 & \text{für } r > r_c \end{cases} \quad (1)$$

Die radialen Abhängigkeiten von Temperatur und Dichte werden jedoch beibehalten. Das Kanalmodell für σ stellt im allgemeinen eine gute Näherung dar, wie die $\sigma(r)$ -Verteilung in vielen Fällen zeigt. Die Bogenrandzone, die einen steilen Anstieg der Leitfähigkeit aufweist, wird bei diesem Kanalmodell durch eine Grenzfläche angenähert, die

sich als Bogenrand-Isotherme T_c auffassen läßt (vgl. Abb. 4):
 T_c ist die Temperatur, bei der im Kanalmodell der Wert der elektrischen Leitfähigkeit von 0 auf σ_c springt. Damit ist aber klar, daß eine Temperaturstörung T_1 eine radiale Verschiebung δ des kreisförmigen Kanalquerschnitts bewirkt (s. Abb. 5). Da die Temperatur überall auf der Kanaloberfläche den Wert T_c behalten muß, gilt für den gestörten Bogen

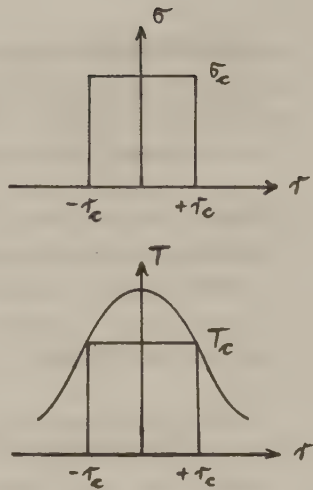


Abb. 4 Kanalmodell

$$\begin{aligned}
 T(\tau_c + \delta, k, t, \varphi, z) &= \\
 &= T_0(\tau_c) + \hat{T}_1(\tau_c, k, t) \cdot e^{i(\varphi - kz)} + \frac{dT_0/d\tau}{dT/d\tau|_{\tau=\tau_c}} \delta \\
 &= T_c = T_0(\tau_c)
 \end{aligned} \quad (2)$$

so daß

$$\delta = -\hat{T}_1(\tau_c, k, t) e^{i(\varphi - kz)} / (dT_0/d\tau)_{\tau=\tau_c} \quad (3)$$

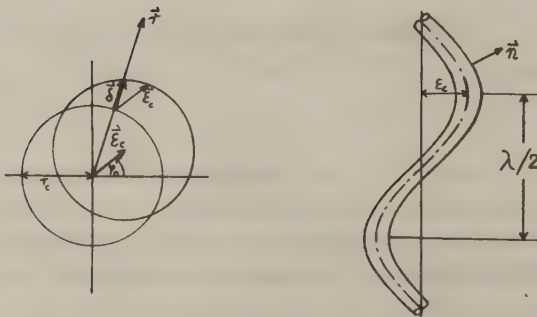


Abb. 5 Bogengeometrie

Mit der Störgröße

$$\varepsilon_c := \varepsilon(\tau_c, k, t) = -\hat{T}_1(\tau_c, k, t) / (dT_0/dr)_{\tau=\tau_c} \quad (4)$$

läßt sich dann die Auslenkung eines jeden Punktes der Bogenrandisothermen durch einen Verschiebungsvektor

$$\vec{\varepsilon}_c = \varepsilon_c \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\varphi - kz)} \cdot (\vec{e}_r + i \vec{e}_\varphi) \right\} \quad (5)$$

darstellen, der die Verschiebung des kreisförmigen Randes eines Kanalquerschnitts $z = \text{konst}$ in der Richtung $\varphi_0 = kz$ angibt (s. Abb. 5). Für die Kanaloberfläche des gestörten Bogens gilt die Beziehung

$$\tau = \tau_c + \delta = \tau_c + \varepsilon_c \cdot e^{i(\varphi - kz)} \quad (6)$$

so daß sich die Oberflächennormale als Gradient von $\tau - \delta$ an der Stelle τ_c zu

$$\vec{n} = \vec{e}_r + i \varepsilon_c e^{i(\varphi - kz)} \cdot \left(-\frac{\vec{e}_\varphi}{\tau_c} + k \vec{e}_z \right) \quad (7)$$

ergibt. $\vec{e}_z$ soll die positive Stromrichtung des ungestörten Bogens haben.

Der Wert τ_c des Kanalradius stellt nun eine bestimmende Größe für die Ergebnisse unserer Rechnungen dar, da er anstelle der exakten $\sigma(r)$ - und $S(r)$ -Verteilungen in diese eingeht. In /1/ wurde τ_c mit Hilfe der exakten Verteilungen unter Berücksichtigung von Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht für eine Reihe von Bogenstromwerten bestimmt, indem die mittlere quadratische Abweichung zwischen wahrer σ -Verteilung und Kanalmodell bei Einhaltung der Nebenbedingung $G = \sigma_c \pi \tau_c^2$ für den integralen Bogenleitwert minimiert wurde. Die dort berechneten Werte können wir mit Hilfe der Ähnlichkeitsrelationen für zylindrische Lichtbögen auf unsere experimentellen Bedingungen umrechnen (s. Anhang).

Damit sind nun die Voraussetzungen für die Lösung unseres Gleichungssystems (Kap. 4.1.) geklärt. Die Rechnungen werden Lösungen A^i für den Bereich im Innern des elektrisch leitfähigen Bogenkanals und Lösungen A^a für den nichtleitenden Außenbereich liefern, die dann bestimmte physikalische Randbedingungen auf der Kanaloberfläche und an der Wand des Bogengefäßes erfüllen müssen.

4.3. Berechnung der Störgrößen

An verschiedenen Stellen der Rechnungen werden, wie dies bei hydrodynamischen Stabilitätsuntersuchungen ebenfalls üblich ist, normierte dimensionslose Größen eingeführt, wie sie für Ähnlichkeitsbetrachtungen (hier z. B. bei Lichtbögen mit unterschiedlichen Gefäßdurchmessern) nützlich sind. Die normierten Größen werden mit einem * markiert, z. B.

$$S = L \cdot S^* \quad (1)$$

für das Wärmestrompotential, das auf die Bogenleistung pro Längeneinheit normiert wird. Anstelle des Radius führen wir die dimensionslosen Zahlen

$$s := r \cdot k, \quad s_c := r_c \cdot k, \quad s_w := R \cdot k \quad (2)$$

ein. Außerdem definieren wir einen Differentialoperator D_B , der sich aus der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten für unseren Störansatz A_1 zu

$$D_B := \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} - \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} s \frac{d}{ds} - \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \quad (3)$$

ergibt. Die Gleichung $D_B f = 0$ für die Funktion f stellt dann eine Besselsche Differentialgleichung dar. Ihre Lösungen sind die modifizierten Besselfunktionen $I_n(s)$ und $K_n(s)$.

Die Werte dieser und der mod. Besselfunktionen höherer Ordnung und ihrer Ableitungen an der Stelle $s=s_c$ kürzen wir durch die Bezeichnung der Funktion ohne Argumentangabe ab, also z. B.

$$I_1 := I_1(s_c), \quad K_1 := K_1(s_c) \quad (4)$$

Die Ableitungen nach s werden durch einen Apostroph gekennzeichnet, z. B. $I_1'(s) = \partial I_1(s) / \partial s$.

Zunächst sollen nun mit Hilfe der elektromagnetischen Gleichungen (4.1.5.) die Störstromdichte und das Störmagnetfeld berechnet werden, so daß die antreibende Kraft der Instabilität, die Lorentzkraft, bestimmt werden kann.

4.3.1. Stromdichte

Aus Gleichung 4.1.5. (2) folgt mit Gleichung 4.1.5. (1) für das elektrische Potential V die Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$. Wegen $\Delta V_0 = 0$ gilt dann für die Störung V_1

$$\Delta^2 \mathcal{D}_B \hat{V}_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_B \hat{V}_1 = 0 \quad (1)$$

so daß

$$\hat{V}_1 = K_E \cdot I_1(s) \quad (2)$$

($K_E(s)$ ist im Nullpunkt singularär und kommt deshalb wegen der Stetigkeitsbedingung auf der Bogenachse als Lösung nicht in Frage). Die Integrationskonstante K_E können wir mit Hilfe der Randbedingung

$$\vec{j} \cdot \vec{n} / r = \tau_c + \delta = 0 \quad (3)$$

für das Verschwinden der Normalkomponente der Stromdichte

auf der Oberfläche des ausgelenkten Bogenkanals bestimmen.
Mit 4.2.2. (7) gilt dann bei Beachtung von

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1 = j_0 \vec{e}_z + \vec{j}_1 \quad (4)$$

auf der Kanaloberfläche

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0 = j_0 i \epsilon_c k e^{i(\varphi - kz)} + j_{1r} \quad (5)$$

Für die Störgrößen gilt $A_1(\tau_c + \delta) = A_1(\tau_c)$, so daß aus Gl. (5) die Randbedingung

$$j_{1r}(\tau_c, \varphi, z, k, t) = -j_0 i \epsilon_c k e^{i(\varphi - kz)} \quad (6)$$

für die r-Komponente der Störstromdichte folgt. Mit Hilfe von Gl. 4.1.5. (1) in der Form

$$\vec{j}_1 = -\sigma_c \text{grad } V_1 \quad (7)$$

läßt sich dann K_ϵ bestimmen, so daß wir schließlich

$$\hat{j}_{1r}(s, k, t) = -i \epsilon_c k j_0 I_1'(s) / I_1' \quad (8)$$

$$\hat{j}_{1\varphi}(s, k, t) = \epsilon_c k j_0 I_1(s) / (s I_1') \quad (9)$$

$$\hat{j}_{1z}(s, k, t) = -\epsilon_c k j_0 I_1(s) / I_1' \quad (10)$$

für die Amplituden der drei Komponenten der Störstromdichte erhalten, wobei $j_0 = I_0 / (\pi \tau_c^2)$.

4.3.2. Magnetfeld

Die bekannten Grundlösungen für das Eigenmagnetfeld des Bogens lauten

$$B_0^i = \mu_0 j_0 \frac{s}{2k} \vec{e}_\varphi ; \quad 0 \leq |s| \leq s_c \quad (1)$$

für den Innenbereich und

$$B_0^a = \mu_0 j_0 \frac{s_c^2}{2 s k} \vec{e}_\varphi ; \quad |s| > s_c \quad (2)$$

für den Außenbereich bezüglich des elektrisch leitenden Bogenkanals.

Die Störkomponenten des Magnetfeldes lassen sich mit Hilfe der Laplace-Gleichung für B berechnen, die aus den Gl. 4.1.5. (1), (3) und (4) folgt:

$$\Delta \vec{B} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{B}_1 = 0 \quad (3)$$

Mit

$$\vec{B} = (\hat{B}_{1r}, \hat{B}_{1\varphi}, \hat{B}_{1z}) e^{i(\varphi - kz)} \quad (4)$$

gilt dann

$$\mathcal{D}_B \hat{B}_{1z}^i = 0 \quad (5)$$

so daß

$$\hat{B}_{1z}^i = K^i I_1(s) \quad (6)$$

gelten muß ($K_1(s)$ kommt wiederum als Lösung für den Innenbereich nicht in Betracht).

Mit Hilfe von Gl. 4.1.5. (3) lassen sich dann die anderen Komponenten von $\vec{B}_1^i$ bestimmen, z. B.

$$(\text{rot } \vec{B}_1^i)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{B}_{1z}^i}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{B}_{1\varphi}^i}{\partial z} = \mu_0 j_{1r} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \frac{i}{r} \hat{B}_{1z}^i + ik \hat{B}_{1\varphi}^i = \mu_0 \hat{j}_{1r} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \hat{B}_{1\varphi}^i = -i \frac{\mu_0}{k} \hat{j}_{1r} - \frac{\hat{B}_{1z}^i}{s} \quad (9)$$

Mit Hilfe der φ -Komponente von $\text{rot } \vec{B}$ folgt für die r-Komponente von $\vec{B}_1$

$$\hat{B}_{1r}^i = \frac{i\mu_0}{k} \hat{J}_{1\varphi} + i \frac{2\hat{B}_{1z}^i}{2s} \quad (10)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten K^i aus der Randbedingung für das Magnetfeld am Kanalrand des gestörten Bogens muß noch das äußere Magnetfeld B_1^a berechnet werden. Da außerhalb des stromführenden Kanals die Stromdichte verschwindet, gilt $\text{rot } \vec{B}^a = 0 \Rightarrow$

$$\exists V_B \text{ mit } \vec{B}^a = -\text{grad } V_B \quad (11)$$

Wegen $\text{div } \vec{B}^a = 0$ gilt für das magnetische Potential V_B die Laplace-Gleichung $\Delta V_B = 0$, so daß

$$\mathcal{D}_B \hat{V}_{B,1} = 0 \quad (12)$$

woraus

$$\hat{V}_{B,1} = K^a K_1(s) \quad (13)$$

wegen $\lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s) = \infty$ folgt. Gl. (11) liefert dann

$$\hat{B}_{1r}^a = -k K^a K_1'(s) \quad (14)$$

$$\hat{B}_{1\varphi}^a = -ik K^a K_1(s)/s \quad (15)$$

$$\hat{B}_{1z}^a = ik K^a K_1(s) \quad (16)$$

Die Randbedingung für das Magnetfeld am Kanalrand des gestörten Bogens lautet

$$B^i(r_c + \delta, k, t, \varphi, z) = B^a(r_c + \delta, k, t, \varphi, z) \quad (17)$$

Da die Grundlösung $\vec{B}_0$ nur eine φ -Komponente hat, folgen aus (17) die beiden Randbedingungen

$$\hat{B}_{1r}^i(r_c, h, t) = \hat{B}_{1r}^a(r_c, h, t) \quad (18)$$

und

$$\hat{B}_{1z}^i(r_c, h, t) = \hat{B}_{1z}^a(r_c, h, t) \quad (19)$$

mit deren Hilfe sich die beiden Integrationskonstanten K^i und K^a bestimmen lassen. Wir erhalten dann für das allein interessierende Störmagnetfeld im Bogeninnern:

$$\hat{B}_{1z}^i = -\mu_0 \epsilon_0 j_0 \cdot \frac{I_a K_a}{I_a'} I_a(s) \quad (20)$$

$$\hat{B}_{1\varphi}^i = \mu_0 \epsilon_0 j_0 \cdot \left(-\frac{I_a'(s)}{I_a'} + \frac{I_a K_a}{I_a'} \cdot \frac{I_a(s)}{s} \right) \quad (21)$$

$$\hat{B}_{1r}^i = i \mu_0 \epsilon_0 j_0 \cdot \left(\frac{I_a(s)}{s I_a'} - \frac{I_a K_a}{I_a'} \cdot I_a'(s) \right) \quad (22)$$

4.3.2.1. Axiales Fremdmagnetfeld

Für die Berechnung der Lorentzkraft wird nun zusätzlich noch ein axiales Fremdmagnetfeld $\vec{B}^a$ berücksichtigt, das zeitlich veränderlich sein darf. Wir definieren dazu einen dimensionslosen Fremdmagnetfeld-Faktor $FM = FM(t)$ mittels

$$\vec{B}_a =: FM(t) \cdot B_{0c} \cdot \vec{e}_z \quad (1)$$

wobei wir den Betrag B_{0c} der magnetischen Flußdichte am Kanalrand des ungestörten Bogens als Bezugsgröße verwenden:

$$B_{0c} = \mu_0 j_0 s_c / (2h) \quad (2)$$

Da $\vec{e}_z$ die positive Stromrichtung des ungestörten Bogens angibt und wir unsere Rechnungen für eine Rechtsschrauben-Bogenhelix durchführen, bedeutet dann eine positive Polarität des Faktors FM, daß das axiale Zusatzfeld dieselbe Richtung hat wie die auf der Gefäßachse resultierende z-Komponente des Eigenmagnetfeldes des helikal verformten Bogens. $FM < 0$ bedeutet Antiparallelität (s. Abb. 6).

Rechtsschraube
oder Linksschraube

axiales
Fremdmagnetfeld

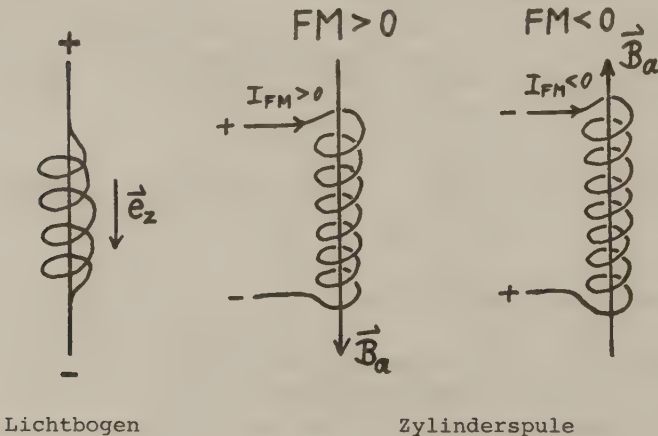


Abb. 6 Zur Polarität des Fremdmagnetfeld-Faktors

Für eine Linksschrauben-Bogenhelix bedeutet $FM > 0$ jedoch, daß das axiale Fremdmagnetfeld antiparallel zur z-Komponente des Eigenmagnetfeldes auf der Bogenachse gerichtet ist; $FM < 0$ bedeutet dann Richtungsgleichheit. Es ist klar, daß das axiale Fremdmagnetfeld im ersten Fall eine andere Wirkung haben wird als im Linksschrauben-Fall. Wir werden

jedoch später sehen, daß sich die Ergebnisse der Rechts-schrauben-Rechnungen zwanglos auf den Linksschrauben-Fall übertragen lassen (Kap. 4.4.).

Das Gesamtmagnetfeld $\vec{B}$ ergibt sich nun aus der Überlagerung von Eigen- und Fremdmagnetfeld zu

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_a \\ &= (B_{1r}, B_0 + B_{1\varphi}, B_a + B_{1z})\end{aligned}\quad (3)$$

mit

$$B_a = FM \cdot B_{oc}.$$

4.3.3. Lorentzkraft

Der Störanteil der Lorentzkraft läßt sich dann gemäß

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{j}_0 \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_a) + \vec{j}_1 \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_a) + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 \quad (1)$$

zu

$$(\vec{j} \times \vec{B})^i = \vec{j}_1 \times B_0^i + \vec{j}_1 \times B_a^i + \vec{j}_0 \times B_1^i \quad (2)$$

und

$$(\vec{j} \times \vec{B})_1^i = 0 \quad (3)$$

berechnen. Für die Lösung des Strömungsproblems (Impulsbilanz 4.1.2.) werden später die folgenden leicht zu berechnenden Ausdrücke benötigt:

$$\begin{aligned}(\widehat{\vec{j} \times \vec{B}})_{1r}^i &= \epsilon_c \mu_0 j_0^2 \left(\frac{s I_n(s)}{2 I_n'} + \frac{I_n'(s)}{I_n'} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_n K_n}{I_n'} \cdot \frac{I_n(s)}{s} + FM \cdot \frac{s_c}{2} \cdot \frac{I_n(s)}{s I_n'} \right)\end{aligned}\quad (4)$$

$$\widehat{(\vec{j} \times \vec{B})}_{14}^i = \epsilon_c i \mu_0 j_0^2 \left(\frac{I_1(s)}{s I_1'} - \frac{I_1 K_1}{I_1'} \cdot \frac{I_1'(s)}{I_1'} + \right. \\ \left. + FM \cdot \frac{g_c}{2} \cdot \frac{I_1'(s)}{I_1'} \right) \quad (5)$$

$$\widehat{(\vec{j} \times \vec{B})}_{12}^i = -\epsilon_c i \mu_0 j_0^2 \frac{s}{2} \cdot \frac{I_1'(s)}{I_1'} \quad (6)$$

$$\widehat{\text{div}(\vec{j} \times \vec{B})}_1^i = \epsilon_c 2 \mu_0 j_0^2 h \frac{I_1(s)}{I_1'} \quad (7)$$

$$\widehat{(\text{rot}(\vec{j} \times \vec{B})_1^i)}_z = \\ = -\epsilon_c i \mu_0 j_0^2 h \frac{I_1(s)}{I_1'} \cdot \left(\frac{1}{2} + I_1' K_1 - FM \cdot \frac{g_c}{2} \right) \quad (8)$$

Das axiale Fremdmagnetfeld $\vec{B}_a$ geht über die r- und die φ -Komponente der Lorentzkraft in die Impulsbilanz ein und beeinflusst so die Bogenstabilität.

4.3.4. Strömungsproblem

Die Auffindung der Lösungen für die Impulsbilanz 4.1.2. bedeutet die Lösung des Strömungsproblems für den gestörten Bogen, bei dem Gasströmungen $\vec{v}_1$ auftreten. Die Impulsbilanz hat für den ungestörten Bogen die Form

$$\vec{j}_0 \times \vec{B}_0 - \text{grad } p_0 = 0 \quad (1)$$

gibt also lediglich das Kräftegleichgewicht für den Pinchdruck wieder. Für die Störgrößen liefert die Impulsbilanz bei Vernachlässigung des Trägheitsterms (s. Kap. 4.1.2.)

$$(\vec{j} \times \vec{B})_1 - \text{grad } p_1 - \eta \text{rot rot } \vec{v}_1 + \frac{4}{3} \eta \text{grad div } \vec{v}_1 = 0 \quad (2)$$

Der konstant gesetzte Mittelwert für η geht in die Maecker'sche Zahl (s. u.) ein, die wir aufgrund der Angaben in /1/ für unsere experimentellen Bedingungen berechnen können (s. Anhang). Die Annahme eines konstanten Mittelwertes für η stellt eine gute Näherung dar, weil sich die Viskosität im Dissoziationsbereich des Wasserstoffgases, der den weitest- aus größten Bereich des Entladungsgefäßes einnimmt, nur schwach verändert.

Aufgrund des Störansatzes 4.2.1. (6) liefern uns die drei Gleichungen (2) zusammen mit der Leistungsbilanz für die Störgrößen ein System von 8 gewöhnlichen Differentialgleichungen (4 Gleichungen für den Innenbereich und 4 Gleichungen für den Außenbereich) zweiter Ordnung, die nun gelöst werden sollen. Zur Vereinfachung des Rechenganges werden im folgenden anstelle der drei Komponenten der Impulsbilanz nur ihre Divergenz, die z-Komponente ihrer Rotation und ihre z-Komponente gelöst. Für unsere Stabilitätsuntersuchung ist es außerdem nicht notwendig, die Größen p_1 und $\vec{v}_1$ selbst

zu berechnen, wie wir weiter unten sehen werden. An ihrer Stelle kann einfacher mit den neuen Variablen $\vec{\omega}$, q und w gearbeitet werden, die im folgenden eingeführt werden.

4.3.4.1. Divergenz der Impulsbilanz

Wir bilden die Divergenz der Impulsbilanz 4.3.4. (2) und erhalten so unter Verwendung der Abkürzung

$$q := \frac{4}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} - p \quad (1)$$

die Gleichungen

$$\Delta q_n^i + \operatorname{div}(\vec{j} \times \vec{B})_n^i = 0 \quad (2)$$

und

$$\Delta q_n^a = 0 \quad (3)$$

Mit der Normierung

$$q^* := \frac{k^2}{\mu_0 j_0^2 s_c} \cdot q \quad (4)$$

gilt dann für den Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_c$

$$\mathcal{D}_B \hat{q}_n^{*i} = -\frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot 2 \cdot \frac{I_n(s)}{I_n'} \quad (5)$$

und für den Außenbereich

$$\mathcal{D}_B \hat{q}_n^{*a} = 0 ; \quad s_c < |s| \leq s_w \quad (6)$$

Die Lösungen lauten

$$\hat{q}_n^{*i} = C_1 I_n(s) - \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot \frac{s I_n'(s)}{I_n'} \quad (7)$$

und

$$\hat{q}_n^{*a} = C_7 I_n(s) + C_8 K_n(s) \quad (8)$$

wobei wegen der Singularität von $K_1(s)$ bei $s=0$ in der Innenbereichs-Lösung wiederum nur eine Integrationskonstante auftritt.

4.3.4.2. Rotation der Impulsbilanz

Mit der Abkürzung

$$\vec{\omega} := \text{rot } \vec{v} \quad (1)$$

liefert die Rotationsbildung für die Impulsbilanz die Gleichung

$$\eta \Delta \vec{\omega}_1 + \text{rot}(\vec{j} \times \vec{B})_1 = 0 \quad (2)$$

Wir benutzen die z-Komponente dieser Gleichung für den Innen-

$$\eta \Delta \omega_{1z}^i + (\text{rot}(\vec{j} \times \vec{B})_1^i)_z = 0 \quad (3)$$

und den Außenbereich

$$\Delta \omega_{1z}^a = 0 \quad (4)$$

zur Berechnung der Wirbelstärken-Komponente ω_{1z} .

Mit der Normierung

$$\vec{\omega}^* := \frac{\eta k^2}{\mu_0 j_0^2 s_c} \cdot (\omega_r, i\omega_\varphi, i\omega_z) \quad (5)$$

gilt dann für den Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_c$

$$\mathcal{D}_B \omega_{1z}^{*i} = - \frac{\epsilon_c}{r_c} \cdot \frac{I_1(s)}{I_1'} \left(\frac{1}{2} + I_1 K_1 - FM \cdot \frac{s_c}{2} \right) \quad (6)$$

und für den Außenbereich $s_c < |s| \leq s_w$

$$D_B \hat{\omega}_{12}^{*a} = 0. \quad (8)$$

Die Lösungen lauten

$$\hat{\omega}_{12}^{*i} = C_2 I_1(s) - \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot \frac{s I_1'(s)}{2 I_1'} \left(\frac{1}{2} + I_1 K_1 - FM \cdot \frac{s_c}{2} \right) \quad (9)$$

und

$$\hat{\omega}_{12}^{*a} = C_{11} I_1(s) + C_{12} K_1(s). \quad (10)$$

Die φ - und die r-Komponenten lassen sich nun direkt aus der Impulsbilanz 4.3.4. (2) bestimmen, deren r-Komponente für $\hat{\omega}_{1\varphi}^*$ die Beziehung liefert

$$\hat{\omega}_{1\varphi}^* = -\frac{\hat{\omega}_{12}^*}{s} + \frac{d\hat{q}_1^*}{ds} + \frac{1}{\tau_c \mu_0 j_0^2} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})_{1\varphi} \quad (11)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1\varphi}^{*i} = & C_1 I_1'(s) - C_2 \frac{I_1(s)}{s} - \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot \left(\frac{I_1(s)}{s} \cdot \frac{1 + I_1 K_1}{I_1'} + \right. \\ & \left. + \frac{s I_1(s)}{2 I_1'} - I_1'(s) \cdot \frac{s + 2 I_1 K_1}{4 I_1'} \right) + \\ & + \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot FM \cdot \left(\frac{s_c}{2 I_1'} \cdot \frac{I_1(s)}{s} - \frac{s_c}{4 I_1'} \cdot I_1'(s) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

und

$$\hat{\omega}_{1\varphi}^{*a} = -C_7 I_1'(s) + C_8 K_1'(s) - C_{11} \frac{I_1(s)}{s} - C_{12} \frac{K_1(s)}{s} \quad (13)$$

Die r-Komponente der Wirbelstärke $\vec{\omega}_1$ läßt sich mit Hilfe der φ -Komponente der Impulsbilanz bestimmen:

$$\hat{\omega}_{1r}^* = \frac{d\hat{\omega}_{1z}^*}{ds} - \frac{\hat{q}_1^*}{s} + \frac{1}{\tau_c \mu_0 j_0^2} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})_{1\varphi} \quad (14)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1r}^{*i} = & -C_1 \frac{I_1(s)}{s} + C_2 I_1'(s) + \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \left(I_1'(s) \frac{1+I_1 K_1}{I_1'} + \right. \\ & \left. - s I_1(s) \cdot \frac{1+2 I_1 K_1}{4 I_1'} - \frac{I_1(s)}{s} \cdot \frac{s+2 I_1 K_1}{4 I_1'} \right) + \\ & - \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot FM \cdot \left(\frac{s_c}{2 I_1'} I_1'(s) - \frac{s_c}{4 I_1'} \cdot (s I_1(s) + \frac{I_1(s)}{s}) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

und

$$\hat{\omega}_{1r}^{*a} = -C_7 \frac{I_1(s)}{s} - C_8 \frac{K_1(s)}{s} + C_{11} I_1'(s) + C_{12} K_1'(s) \quad (16)$$

4.3.4.3. z-Komponente der Impulsbilanz

Die z-Komponente der Impulsbilanz liefert nun die Gleichung

$$\Delta v_{1z} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} q_1 - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{v}_1 + \frac{1}{\eta} (\vec{j} \times \vec{B})_{1z} = 0 \quad (1)$$

Bei der zeitunabhängigen Theorie war diese Gleichung zur Berechnung von $v_{1z} \hat{=} v_{1z}$ benutzt worden, indem die Größe $\operatorname{div} \vec{v}_1$ mit Hilfe der Massenbilanz substituiert wurde, in der $\partial s_m / \partial t = 0$ gesetzt werden konnte. Da dies bei der zeitabhängigen Theorie nun nicht mehr richtig ist, substituieren wir die Größe $\operatorname{div} \vec{v}_1$ statt dessen mit Hilfe der Leistungsbilanz, wobei die Massenbilanz mitverwendet wird.

Die Leistungsbilanz haben wir in Kap. 4.1.1. eingeführt als

$$s_M \frac{dh}{dt} = \Delta S + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2)$$

Da für die Grundlösungen

$$\Delta S_0 + (\vec{j} \cdot \vec{E})_0 = 0 \quad (3)$$

gilt, heißt die Leistungsbilanz für die Störgrößen

$$s_M \frac{dh}{dt} = \Delta S_1 + (\vec{j} \cdot \vec{E})_1 \quad (4)$$

Die linke Seite der Gleichung läßt sich nun mit der Massenbilanz in eine Form bringen, die die Substitution von $\text{div } \vec{v}_1$ in Gleichung (1) erlaubt:

$$s_M \frac{dh}{dt} = s_M \left(\frac{\partial h}{\partial s_M} \right)_p \frac{ds_M}{dt} + s_M \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{s_M} \frac{dp}{dt} \quad (5)$$

Der zweite Term kann wegen der nur geringfügigen Druckänderungen in unserer Entladung vernachlässigt werden (s. o.). Den ersten Term können wir mit Hilfe der Massenbilanz 4.1.3., die uns die Beziehung

$$\frac{ds_M}{dt} = \frac{\partial s_M}{\partial t} + \text{div}(s_M \vec{v}_1) - s_M \text{div } \vec{v}_1 = -s_M \text{div } \vec{v}_1 \quad (6)$$

liefert, noch weiter umformen zu

$$s_M \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial (1/s_M)} \right)_p \cdot \text{div } \vec{v}_1 \quad (7)$$

Für die Größe $(\partial h / \partial (1/s_M))_p = a_H c_p / \alpha$ wird wie in der zeitunabhängigen Theorie ein konstanter Mittelwert benutzt, obwohl nur für Teilchen ohne innere Freiheitsgrade diese Größe konstant ist und dann den Wert $(5/2) \cdot p$ hat. In unserem

Fall hat $(\partial h / \partial (1/s_M))_p$ jedoch ein um einen Faktor 4 größeren Maximalwert im Dissoziationsgebiet des Wasserstoffbogens. Wir benutzen dennoch zunächst den konstanten Wert

$$\alpha := \langle (\partial h / \partial (1/s_M))_p \rangle \quad (8)$$

den wir nach den Angaben in /1/ auf unsere Bogendaten umrechnen können (s. Anhang). Diese relativ grobe Näherung werden wir jedoch später fallen lassen (s. weiter unten Mehrbereichsmodell).

Wir substituieren nun die Größe $\text{div } \vec{v}_1$ in Gl. (1) mit Hilfe der Beziehung

$$\text{div } \vec{v}_1 = (\Delta S_1 + (\vec{j} \cdot \vec{E})_1) / \alpha \quad (9)$$

woraus die Gleichung

$$\partial_3 \hat{w}_1 - \frac{i}{\gamma k} \hat{q}_1 + \frac{1}{\gamma k^2} (\vec{j} \times \vec{B})_{12} + \frac{i}{\alpha k} (\vec{j} \cdot \vec{E})_1 = 0 \quad (10)$$

für die Größe

$$w := v_z + \frac{ik}{\alpha} \cdot S \quad (11)$$

folgt. Wir führen nun die Normierungen

$$w^* := \frac{i \gamma k^3}{\mu_0 j_0^2 s_c} \cdot w \quad (12)$$

$$v^* := \frac{\gamma k^3}{\mu_0 j_0^2 s_c} \cdot (v_r, i v_\varphi, i v_z) \quad (13)$$

$$S^* := \frac{1}{L} \cdot S \quad (14)$$

und die Maeckersche Zahl

$$Mk := \frac{\alpha \mu_0 I_B^2}{\eta L} = \frac{\alpha \mu_0 j_0^2 \pi^2 s_c^4}{\eta L L^4} \quad (15)$$

ein. w^* läßt sich damit schreiben als

$$w^* = v_z^* - \frac{\pi^2 s_c^3}{Mk} \cdot S^* \quad (16)$$

Für die normierten Größen lautet Gl. (10) dann für den Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_c$

$$\begin{aligned} D_B \hat{w}_1^{*i} &= - \frac{\epsilon_c}{\tau_c} \frac{2 \pi s_c^2}{Mk} \cdot \frac{I_1(s)}{I_1'} - \hat{q}_1^{*i} - \frac{\epsilon_c}{\tau_c} \frac{s I_1'(s)}{2 I_1'} \\ &= - \frac{\epsilon_c}{\tau_c} \frac{2 \pi s_c^2}{Mk} \cdot \frac{I_1(s)}{I_1'} - C_1 I_1(s) + \frac{\epsilon_c}{\tau_c} \frac{s I_0(s) - I_1(s)}{2 I_1'} \end{aligned} \quad (17)$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung aus der inhomogenen ohmschen Heizung beim gestörten Bogen resultiert:

$$(\vec{j} \cdot \vec{E})_1^i = j_{1z} E_0 + j_0 E_{1z} = 2 j_{1z} E_0 \quad (18)$$

Die stabilisierende Wirkung der inhomogenen Heizung durch die stärkere Leistungszufuhr auf der konkaven Krümmungsseite des gestörten Bogens wurde in /1/ nachgewiesen. Wir sehen diesen Einfluß hier bereits beim Strömungsproblem, weil die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit dazu führt, daß das Strömungsproblem nicht mehr unabhängig von der energetischen Betrachtung gelöst werden kann.

Für den Außenbereich $s_c < |s| \leq s_w$, in dem die ohmsche Heizung und die Lorentzkraft verschwinden, erhalten wir

$$D_B \hat{w}_1^{*a} = - C_7 I_1(s) - C_8 K_1(s) \quad (19)$$

Die Lösungen lauten dann für $0 \leq |s| \leq s_c$

$$\hat{w}_1^{*i} = -C_1 \frac{s}{2} I_2'(s) + C_3 I_2(s) + \frac{c_c}{f_c} \cdot \frac{s^2 I_2(s) - 2s I_2'(s)}{s I_1'} - \frac{f_c}{f_c} \cdot \frac{\pi s_c^2}{Mk} \cdot \frac{s I_1'(s)}{I_1'} \quad (20)$$

und für $s_c < |s| \leq s_w$

$$\hat{w}_1^{*a} = -C_7 \frac{s}{2} I_2'(s) - C_9 \frac{s}{2} K_2'(s) + C_9 I_2(s) + C_{10} K_2(s) \quad (21)$$

Bis zu diesem Punkt der Rechnungen mußten wir die Zeitabhängigkeit der Störgrößen noch nicht explizit berücksichtigen, so daß wir unsere partiellen Differentialgleichungen aufgrund des Separationsansatzes 4.2.1.(6) wie gewöhnliche Differentialgleichungen behandeln konnten. Die Leistungsbilanz wird sich jedoch nun in dieser Weise nur dann lösen lassen, wenn wir auch für die Zeitabhängigkeit einen geeigneten Separationsansatz angeben können, etwa in der Form $S_1(r, t) = f(r) \cdot g(t)$. - Im folgenden geben wir eine Approximationsmethode an, mit deren Hilfe auch die Leistungsbilanz wie eine gewöhnliche Differentialgleichung gelöst werden kann.

4.3.5. Integration der Energiegleichung

Die Energiegleichung (Leistungsbilanz 4.1.1.) hat für den ungestörten, zylindrischen Bogen die Form

$$\Delta S_0 + j_0 E_0 = 0. \quad (1)$$

Ihre Lösungen können wir für unser Kanalmodell sofort angeben: im Bogeninnern gilt

$$S_0^i(s) = \frac{L}{4\pi} \left(1 - \frac{s^2}{s_c^2}\right) - \frac{L}{2\pi} \ln \frac{s_c}{s_w}, \quad 0 \leq |s| \leq s_c, \quad (2)$$

und im Außenbereich zwischen Kanal und Gefäßwand gilt

$$S_0^a(s) = -\frac{L}{2\pi} \ln \frac{s}{s_w}, \quad s_c < |s| \leq s_w. \quad (3)$$

Die Leistungsbilanz für den gestörten Bogen können wir so umformen, daß sich unter Verwendung der Größe α (s.o.) und der Zustandsgleichung 4.1.4. eine brauchbare Näherung für die Zeitableitung einführen läßt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta S_1 + (\vec{j} \cdot \vec{E})_1 &= s_M \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial (1/s_M)} \right)_p \cdot s_M \cdot \frac{d(1/s_M)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\ &\approx \alpha \cdot s_M \cdot \frac{d(1/s_M)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (4) \end{aligned}$$

Für die Größe $s_M d(1/s_M)/dS$ erhalten wir mit Hilfe der Zustandsgleichung

$$s_M \frac{d(1/s_M)}{dS} = \frac{1}{S + S_a} \quad (5)$$

Die substantielle zeitliche Änderung des Wärmestrompotentials, die ein Masseteilchen bei seiner Bewegung im gestörten Bogen erfährt, können wir in einen lokalen Anteil und einen Term, der durch die Gasströmung im Temperaturgradientenfeld bewirkt wird, zerlegen:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \text{grad} S_0 = \frac{\partial S_1}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial S_0}{\partial r} \quad (6)$$

Der Gradient $\partial S_0 / \partial r = dS_0 / dr$ der Grundlösung $S_0 = S_0(r)$ des Wärmestrompotentials ist bekannt; die Radialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit können wir durch die bereits berechneten Größen $\vec{\omega}_1$ und w_1 und durch das Wärmestrompotential selbst ausdrücken:

$$\omega_{1\varphi} = \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} - \frac{\partial v_{1z}}{\partial r} \quad (7)$$

$\Rightarrow$

$$v_{1r} = \frac{i}{k} \omega_{1\varphi} + i \frac{\partial w_1}{\partial S} + \frac{k}{\alpha} \frac{\partial S_1}{\partial S} \quad (8)$$

Die lokale Zeitableitung von S_1 können wir nun mit Hilfe der Isothermendarstellung /19,20/ des Lichtbogens so approximieren, daß die Leistungsbilanz als gewöhnliche Differentialgleichung behandelt werden kann.

4.3.5.1. Approximation der Zeitableitung

Der ungestörte zylindrische Bogen läßt sich durch eine Schar konzentrischer Zylinderoberflächen beschreiben, die

sich durch eine auf diesen Oberflächen überall gleiche Temperatur auszeichnen, während der Wert dieser Temperatur von der Bogenachse zur Gefäßwand hin monoton abnimmt. Ein Querschnitt durch die konzentrischen Isothermen- Röhren zeigt dann konzentrische Kreise als Linien gleicher Temperatur. Unser Modell des gestörten Bogens (Kap. 4.2.2.) beschreibt die Bogenbewegung durch eine helikale Verschraubung der ursprünglich rohrförmigen Isothermenflächen mit zeitlich wachsender Amplitude ϵ (vgl. Abb. 5). In einem Bogenquerschnitt senkrecht zur Gefäßachse bewegen sich dann die Punkte auf den Isothermen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten $\vec{v}_I$ zur Gefäßwand hin. Auf einer solchen Isothermen verschwindet definitionsgemäß die Zeitableitung des Wärmestrompotentials, so daß

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_I = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}_I \cdot \text{grad } S \quad (1)$$

gilt. Weil die Isothermengeschwindigkeit eine reine Störgröße ist, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial S_1^{i,a}}{\partial t} + v_{I\tau}^{i,a} \frac{dS_0^{i,a}}{d\tau} = 0 \quad (2)$$

für den Innen- bzw. den Außenbereich (die Grundlösungen für S_0 sind im Innen- und Außenbereich verschieden, s. Glchgn. 4.3.5. (2) und 4.3.5. (3)). Für die Approximation der Zeitableitung nehmen wir nun an, daß sich alle Isothermen im Bogenquerschnitt mit derselben Geschwindigkeit bewegen wie der kreisförmige Rand eines Querschnitts durch den elektrisch leitenden Kanal. Wir setzen also hier

$$v_{I\tau}^{i,a}(\tau, k, t, \varphi, z) = \vec{v}_I(\tau_c, k, t, \varphi, z) = \dot{\epsilon}_c^0 e^{i(\varphi - kz)} \quad (3)$$

mit $\dot{\epsilon}_c^0 = d\epsilon_c/dt$. Diese Näherung bedeutet nicht, daß im Ergebnis die Isothermengeschwindigkeit für alle Isothermen gleich wäre: die Ergebnisse für die Isothermengeschwindig-

keiten folgen aus Gl. (2) mit den aufgrund der Näherung berechneten Werten für das Wärmestrompotential zu $v_{\tau} = -(\partial S_1 / \partial t) / (dS_0 / dr)$.

Der Sinn der Näherung ist die Entkopplung der Zeit- und der Ortsabhängigkeit der Lösungen unseres Gleichungssystems: aus der Beziehung

$$\frac{\partial \hat{S}_1^{i,a}}{\partial t} = -\varepsilon_c^0(t) \frac{dS_0^{i,a}}{dr}(r) \quad (4)$$

die sich aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt, folgt, daß die Lösungen S_1^i und S_1^a für S_1 nur solche Faktoren enthalten können, die (für festes k) entweder rein zeit- oder rein ortsabhängig sind. Mathematisch entspricht diese Isothermen-Näherung also zwei Separationsansätzen für die Orts- und die Zeitabhängigkeit der Lösungen, von denen der eine nur im Innen- und der andere allein im Außenbereich bezüglich des Bogenkanals gelten soll, und zwar jeweils für den gesamten Bereich.

Der Vergleich mit dem Experiment muß über die Brauchbarkeit dieser Näherung entscheiden. Wir werden sie jedoch weiter unten durch die Verfeinerung des einfachen Kanalmodells zu einem Mehrbereichsmodell auch theoretisch überprüfen, wobei dann ebenfalls die relativ grobe Approximation der Größe $(\partial h / \partial (1/s_m))_p$ durch den konstanten Mittelwert α überprüft wird.

Im folgenden soll nun die Leistungsbilanz im Rahmen des einfachen Kanalmodells mit Hilfe der Approximation (4) gelöst werden.

4.3.5.2. Berechnung des Wärmestrompotentials

Aufgrund der Überlegungen in den beiden vorangegangenen Abschnitten erhalten wir für die Leistungsbilanz, wenn wir noch die für die lineare Störungstheorie gültige Beziehung $(\hat{v}_{1r} - \hat{\varepsilon}_c)/(s + s_a) = (\hat{v}_{1r} - \hat{\varepsilon}_c)/(s_0 + s_a)$ berücksichtigen, die Gleichung

$$\mathcal{D}_B \hat{S}_1^i = \frac{\alpha}{k^2 (s_0 + s_a)} \frac{d s_0}{d \tau} (\hat{v}_{1r} - \hat{\varepsilon}_c) - \frac{(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{E}})_1}{k^2} \quad (1)$$

Für den Innenbereich gilt nach /1/ die Beziehung

$$\left(\frac{1}{s_0 + s_a} \cdot \frac{d s_0}{d \tau} \right)^i = -k \cdot \frac{2s}{a^2 s_c^2 - s^2} \quad (2)$$

mit

$$a^2 := 1 + 2 \cdot (\ln(s_w/s) + b)$$

$$b := 2\pi s_a / L$$

und für den Außenbereich gilt

$$\left(\frac{1}{s_0 + s_a} \cdot \frac{d s_0}{d \tau} \right)^a = - \frac{k}{s \cdot (\ln(s_w/s) + b)} \quad (3)$$

Wir erhalten dann die beiden Leistungsbilanzen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_B \hat{S}_1^i + \frac{2s}{a^2 s_c^2 - s^2} \frac{d}{ds} \hat{S}_1^i &= - \frac{\alpha}{k} \frac{2s}{a^2 s_c^2 - s^2} \times \\ &\times \left(\frac{i}{k} \hat{\omega}_{1r}^i + i \frac{d}{ds} \hat{w}_1^i - \hat{\varepsilon}_c^o \right) - \frac{(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{E}})_1^i}{k^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 \leq |s| \leq s_c,$$

und

$$D_B \hat{S}_1^a + \frac{1}{s(\ln(s_w/s) + b)} \frac{d}{ds} \hat{S}_1^a = -\frac{\alpha}{k} \frac{1}{s(\ln(s_w/s) + b)} \times$$

$$\times \left(\frac{i}{k} \hat{W}_{14}^a + i \frac{d}{ds} \hat{W}_1^a - \hat{E}_c \right), \quad s_c < |s| \leq s_w. \quad (5)$$

Diese beiden Gleichungen sind den $\psi_{\alpha\beta}$ -Gleichungen in /1/ ähnlich, so daß außer für den Lösungsanteil mit $\hat{E}_c$ die prinzipiellen Lösungen bekannt sind. Sie bestehen aus Kombinationen von Besselfunktionen und Reihenentwicklungen (P_1 bis P_4); die Lösungen für die $\hat{E}_c$ -Anteile finden wir durch die Entwicklung einer neuen Reihe (P_5) für den Innenbereich und durch die Anwendung der "Variation der Konstanten"-Methode unter Verwendung der alten Reihenentwicklungen für den Außenbereich. Daß wir diese Methode nicht auch für den Innenbereich benutzen können liegt am Fehlen einer zweiten linear unabhängigen nicht-singulären Lösung der verkürzten Differentialgleichung für den Innenbereich. Die Reihenentwicklungen P_1 bis P_5 , g_1 und g_2 sowie die daraus abgeleiteten Lösungen g_3 bis g_7 sind im Anhang aufgelistet. Obwohl ein großer Teil der prinzipiellen Lösungen bereits vorhanden ist, müssen dennoch recht langwierige Rechnungen zur Lösung der beiden Gleichungen (4) und (5) durchgeführt werden, die wir hier aber nicht ausbreiten wollen. Die Lösungen lauten

$$\hat{S}_1^{*i} = \sum_{\nu=1}^4 C_\nu \cdot F_\nu(s) + \frac{E_c}{\tau_c} \frac{1}{Mk} \cdot F_5(s) + \frac{E_c}{\tau_c} \cdot F_6(s) +$$

$$+ \frac{E_c}{\tau_c} \cdot FM \cdot F_7(s) + \frac{\hat{E}_c}{\tau_c} \cdot \frac{\tau}{Mk} \cdot F_8(s) \quad (6)$$

für den Innenbereich

$$0 \leq |s| \leq s_c$$

und

$$\hat{\Sigma}_1^{*a} = \sum_{\nu=5}^{12} C_{\nu} \cdot G_{\nu-4}(s) + \frac{\varepsilon_c^0}{\tau_c} \cdot \frac{\tau}{Mk} \cdot G_9(s) \quad (7)$$

für den Außenbereich $s_c < |s| \leq s_w$, wobei

$$Mk = \frac{\alpha \mu_0 I_B}{\eta E_0} \quad (8)$$

und

$$\tau = \frac{\alpha \pi \tau_c^2}{L} \quad (9)$$

τ ist die bereits oben erwähnte Zeitkonstante, die ein Maß für das Verhältnis von Energieinhalt und zugeführter Leistung für den Lichtbogen darstellt, so daß ihr Kehrwert einen ungefähren Wert für die Obergrenze der Anwachsrate der Instabilität im Fall der thermisch bestimmten Bogenbewegung angibt (zur Bedeutung von α s. Kap. 4.3.4.3.).

Die Lösungsfunktionen F_{ν} und G_{ν} lauten:

$$F_1(s) = -\frac{Mk}{\pi^2 s_c^2} \cdot \left[\frac{1}{2} I_1(s) + P_2(s) \right] \quad (10)$$

$$F_2(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left[2 \left(\frac{s}{2as_c} \right)^2 I_1(s) - I_1(s) + P_4(s) \right] \quad (11)$$

$$F_3(s) = -\frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot I_1(s) \quad (12)$$

$$F_4(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left[I_1(s) + P_1(s) \right] \quad (13)$$

$$F_5(s) = \frac{Mk}{\pi s_c} \cdot \frac{s I_1'(s)}{I_1'} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_6(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left\{ - \frac{2+3 I_1 K_1}{2 I_1'} \cdot I_1(s) + \right. \\ \left. + \frac{1+2 I_1 K_1}{2 I_1'} \cdot \left[2 \left(\frac{s}{2 a s_c} \right)^2 I_1(s) + P_4(s) \right] + \right. \\ \left. - \frac{3}{2 I_1'} P_2(s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2 I_1'} \cdot \left[P_3(s) - \left(\frac{s}{2 a s_c} \right)^2 \cdot \left(\frac{s}{2} \right)^2 \cdot I_1(s) \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$F_7(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^2} \cdot \left\{ \frac{3 I_1(s)}{4 I_1'} - \frac{1}{2 I_1'} \left[2 \left(\frac{s}{2 a s_c} \right)^2 I_1(s) + P_4(s) \right] \right\} \quad (16)$$

$$F_8(s) = \frac{Mk}{\pi s_c} \cdot P_5(s) \quad (17)$$

$$G_1(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot g_1(s) \quad (18)$$

$$G_2(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot g_2(s) \quad (19)$$

$$G_3(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left[\frac{s}{2} I_1'(s) - I_1(s) + g_3(s) \right] \quad (20)$$

$$G_4(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left[\frac{s}{2} K_1'(s) - K_1(s) + g_4(s) \right] \quad (21)$$

$$G_5(s) = -\frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot I_1(s) \quad (22)$$

$$G_6(s) = -\frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot K_1(s) \quad (23)$$

$$G_7(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left[g_5(s) - I_1(s) \right] \quad (24)$$

$$G_8(s) = \frac{Mk}{\pi^2 s_c^3} \cdot \left[g_6(s) - K_1(s) \right] \quad (25)$$

$$G_9(s) = \frac{Mk}{\pi s_c} \cdot g_7(s) \quad (26)$$

Damit sind nun die Lösungen unseres Gleichungssystems 4.1.1. bis 4.1.5. bis auf die 12 Integrationskonstanten C_v und die Bogenauslenkung ϵ_c prinzipiell bekannt. Die Unbekannten könnten nun mit Hilfe der in /1/ angegebenen Randbedingungen, denen auch unsere Lösungen genügen müssen, bestimmt werden.

4.3.6. Randbedingungen

Die Lösungen unseres Differentialgleichungssystems müssen 9 Bedingungen auf der Kanaloberfläche des gestörten Bogens und 4 Bedingungen auf der Gefäßwand erfüllen. Die Randbedingungen auf der Gefäßwand, also bei $\varrho = \varrho_w$, lauten:

- (1) Das Wärmestrompotential muß auf der Gefäßwand verschwinden, d. h.

$$S^a(\varrho_w) = 0$$

Die Grundlösung für das Wärmestrompotential im Außenbereich ist gegeben durch

$$S_o^a(\varrho) = -\frac{L}{2\pi} \ln \frac{\varrho}{\varrho_w}$$

verschwindet also auf der Wand, so daß

$$\hat{S}_1^*(\varrho_w) = 0 \quad (1)$$

erfüllt werden muß.

- (2) Die Gasströmung verschwindet auf der Gefäßwand, so

- (3) daß wegen $\vec{v}_0 = 0$ die drei Gleichungen

$$\vec{v}_1^a(\varrho_w) = 0$$

für die r -, φ - und die z -Komponente von $\vec{v}_1$ erfüllt sein müssen. Da wir diese Komponenten selbst nicht berechnet haben, sondern sie durch die Lösungen für $\vec{\omega}_1$ und w_1 ausdrücken, erhalten wir die drei Bedingungen

$$\hat{\omega}_{1\varphi}^{*a}(\varrho_w) + \frac{d}{d\varrho} \left(\hat{w}_1^{*a} + \frac{\pi^2 \varrho^3}{Mk} \hat{S}_1^{*a} \right) \Big|_{\varrho=\varrho_w} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\omega}_{1\tau}^{*a}(s_w) = 0 \quad (3)$$

$$\hat{w}_1^{*a}(s_w) = 0 \quad (4)$$

Die Randbedingungen auf der Kanaloberfläche des gestörten Bogens, also an der Stelle $s = s_c + \delta \cdot k$, ergeben sich aus den folgenden Stetigkeitsforderungen:

(5) Der Gasdruck muß stetig sein, d. h.

$$\begin{aligned} p^i(s_c + \delta \cdot k) &= p + p_0^i(s_c + \delta \cdot k) + p_1^i(s_c) \\ &= p^a(s_c + \delta \cdot k) = p + 0 + p_1^a(s_c) \end{aligned}$$

p ist der Füllgasdruck und p_0^i die Grundlösung für den Pinchdruck:

$$\text{grad } p_0^i = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 \Rightarrow p_0^i(r) = \mu_0 j_0^2 \frac{r_c^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2}\right)$$

$$\Rightarrow p_0^i(s_c + \delta \cdot k) = -\mu_0 j_0^2 s_c \delta / (2k)$$

$$\Rightarrow (p_1^a - p_1^i)_{s=s_c} = -\mu_0 j_0^2 s_c \delta / (2k)$$

Da wir p_1 selbst nicht berechnet haben, wenden wir diese Bedingung auf q_1 an. Da in q_1 auch $\text{div } \vec{v}_1$ enthalten ist, muß zunächst die Stetigkeit von $\text{div } \vec{v}_1|_{s=s_c}$ untersucht werden. Nach Gl. 4.3.4.3. (6) ist

$$\text{div } \vec{v}_1 = -\frac{1}{s_M} \cdot \frac{d s_M}{d t} = \frac{1}{s_M} \cdot \left(\frac{\partial s_{M1}}{\partial t} + \vec{v}_{1\tau} \frac{\partial s_{M0}}{\partial \tau} \right)$$

S_M muß stetig sein, also muß auch S_{M1} und damit $\partial S_{M1} / \partial t$ stetig sein. Da $\vec{v}_{1r}$ stetig sein muß und $\partial S_{M0} / \partial t$ stetig ist, ist insgesamt $\text{div } \vec{v}_1$ stetig. Für q_1 gilt deshalb

$$(q_1^i - q_1^a)_{S=S_c} = (p_1^a - p_1^i)_{S=S_c} \Rightarrow$$

$$(\hat{q}_1^{*i} - \hat{q}_1^{*a})_{S=S_c} = - \frac{S_c}{2} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \quad (5)$$

(6) Die Gasströmung muß stetig sein, d. h.

(7)

(8) $\vec{v}_1^i(S_c) = \vec{v}_1^a(S_c)$

Zusammen mit den nachfolgenden Stetigkeitsforderungen (9) und (10) folgt dann aus der r-Komponente der Impulsbilanz

$$\left(\frac{d\hat{q}_1^{*a}}{ds} - \frac{d\hat{q}_1^{*i}}{ds} \right)_{S=S_c} - \frac{k}{\mu_0 j_0^2 S_c} \cdot (\hat{j} \times \vec{B})_{1r}^i \Big|_{S=S_c} = 0 \quad (6)$$

und aus der φ -Komponente der Impulsbilanz

$$\left(\frac{d\hat{\omega}_{1z}^{*a}}{ds} - \frac{d\hat{\omega}_{1z}^{*i}}{ds} \right)_{S=S_c} + \frac{1}{S_c} (\hat{q}_1^{*i} - \hat{q}_1^{*a})_{S=S_c} +$$

$$- \frac{ik}{\mu_0 j_0^2 S_c} \cdot (\hat{j} \times \vec{B})_{1\varphi}^i \Big|_{S=S_c} = 0 \quad (7)$$

Die Stetigkeit von v_{1z} läßt sich ausdrücken durch

$$\hat{w}_1^{*i}(S_c) + \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \frac{\pi S_c^3}{2 Mk} - \left(\hat{w}_1^{*a} + \frac{\pi^2 S_c^3}{Mk} \hat{S}_1^{*a} \right)_{S=S_c} = 0 \quad (8)$$

wobei zusätzlich die Bedingung (13) angewendet wurde.

- (9) Die ersten Ableitungen der beiden Tangentialkomponenten
 (10) der Gasströmung, abgeleitet senkrecht zur Kanaloberfläche, müssen stetig sein, d. h.

$$(\operatorname{rot} \vec{v}_1^i) \times \vec{n} \Big|_{s=s_c} = (\operatorname{rot} \vec{v}_1^a) \times \vec{n} \Big|_{s=s_c} ,$$

weil andernfalls eine endliche Reibungskraft auf die immaterielle Grenzfläche ausgeübt würde. Damit gilt

$$\frac{d\hat{v}_{1\varphi}^{*i}}{ds} \Big|_{s=s_c} = \frac{d\hat{v}_{1\varphi}^{*a}}{ds} \Big|_{s=s_c} \Rightarrow$$

$$(\hat{\omega}_{12}^{*i} - \hat{\omega}_{12}^{*a})_{s=s_c} = 0 \quad (9)$$

und

$$\frac{d\hat{v}_{12}^{*i}}{ds} \Big|_{s=s_c} = \frac{d\hat{v}_{12}^{*a}}{ds} \Big|_{s=s_c} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\hat{w}_1^{*i}}{ds} + \frac{\pi^2 s_c^3}{Mk} \frac{d\hat{s}_1^{*i}}{ds} - \frac{d\hat{w}_1^{*a}}{ds} - \frac{\pi^2 s_c^3}{Mk} \frac{d\hat{s}_1^{*a}}{ds} \right)_{s=s_c} = 0 \quad (10)$$

- (11) Das Wärmestrompotential muß auf der Kanaloberfläche stetig sein, es muß also gelten

$$\begin{aligned} S^i(s_c + \delta \cdot h) &= S_0^i(s_c + \delta \cdot h) + S_1^i(s_c) \\ &= S^a(s_c + \delta \cdot h) = S_0^a(s_c + \delta \cdot h) + S_1^a(s_c) \end{aligned}$$

Die Grundlösung für das Wärmestrompotential im Außenbereich haben wir oben bereits unter Punkt (1) angegeben; im Innenbereich gilt:

$$S_0^i(s) = \frac{L}{4\pi} \left(1 - \frac{s^2}{s_c^2}\right) - \frac{L}{2\pi} \ln \frac{s_c}{s_w}$$

Diese Grundlösung ist, wie man leicht nachrechnen kann, in linearer Näherung auch an der Stelle $s_c + \delta \cdot h$ stetig. Es folgt:

$$\hat{S}_1^{*i}(s_c) = \hat{S}_1^{*a}(s_c)$$

Mit Bedingung (13) ergibt sich dann

$$\hat{S}_1^{*a}(s_c) - \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot \frac{1}{2\pi} = 0 \quad (11)$$

(12) Der Wärmestrom senkrecht zur Kanaloberfläche muß stetig sein:

$$(\text{grad } S^i) \cdot \vec{n} \Big|_{s=s_c + \delta \cdot h} = (\text{grad } S^a) \cdot \vec{n} \Big|_{s=s_c + \delta \cdot h}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{dS_1^i}{ds} - \frac{dS_1^a}{ds} \right)_{s=s_c} + \left(\frac{dS_0^i}{ds} - \frac{dS_0^a}{ds} \right)_{s=s_c + \delta \cdot h} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{d\hat{S}_1^{*i}}{ds} - \frac{d\hat{S}_1^{*a}}{ds} \right)_{s=s_c} - \frac{1}{\pi s_c} \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} = 0 \quad (12)$$

Diese Bedingungen ergeben nun 12 linear unabhängige Gleichungen für die Unbekannten C_1 bis C_{12} . Eine zusätzliche linear unabhängige Gleichung, die als Bestimmungsgleichung für ϵ_c aufgefaßt werden kann, erhalten wir aus der "Konsistenzbedingung" /1/ für das Kanalmodell.

- (13) Der Wert des Wärmestrompotentials, bei dem in unserem Kanalmodell des Bogens die elektrische Leitfähigkeit einsetzt, durch den also die Lage des stromführenden Kanals definiert ist, ist $S_E = S_0(s_c)$. Um eine konsistente Beschreibung des Problems durch das Kanalmodell zu erreichen, muß dann gefordert werden, daß sich das Wärmestrompotential auf der Kanaloberfläche des sich bewegenden Bogens während des gesamten Bewegungsvorgangs nicht ändert, also immer gleich S_E ist. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 S(s_c + \delta \cdot k, k, t, y, z) &= S_0(s_c) \\
 \Rightarrow \hat{S}_1(s_c, k, t) + \frac{dS_0}{ds}|_{s=s_c} \cdot \epsilon_c &= 0 \\
 \Rightarrow \hat{S}_1^{*i}(s_c, k, t) - \frac{\epsilon_c}{\tau_c} \cdot \frac{1}{2\pi} &= 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) bis (12) stellen nun ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 bis C_{12} in Abhängigkeit von der Bogenauslenkung ϵ_c und ihrer Zeitableitung $\dot{\epsilon}_c$ dar, wobei gleichzeitig die Bedingung (13) einzuhalten ist. Für die Stabilitätsuntersuchung

ist jedoch die Berechnung der Integrationskonstanten nicht notwendig: es genügt, das Zeitverhalten der Bogenauslenkung berechnen zu können. Dies soll im folgenden geschehen.

4.3.7. Differentialgleichung für das Zeitverhalten der Bogenauslenkung

Das lineare Gleichungssystem aus den Gleichungen (1) bis (13) des vorangegangenen Abschnitts kann zur Berechnung der Integrationskonstanten und zur Aufstellung einer linearen Differentialgleichung für das Zeitverhalten von ϵ_c dienen. Wir interessieren uns hier nur für die zweite Möglichkeit, die sich folgendermaßen realisieren läßt: da wir 13 linear unabhängige Gleichungen für die 12 Integrationskonstanten haben, muß die charakteristische Determinante des Gleichungssystems, die sich aus den Koeffizienten der C_v und den inhomogenen Teilen, die ϵ_c und $\dot{\epsilon}_c$ enthalten, bilden läßt, verschwinden. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend /21/ für die Existenz von zumindest einer Lösung

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

($\vec{C} = \vec{0}$ ist keine Lösung für $\epsilon_c \neq 0$) und führt zu der gesuchten Differentialgleichung für ϵ_c . Dazu schreiben wir das Gleichungssystem in der Form

$$M \vec{C}_\epsilon = \vec{0} \quad (2)$$

mit dem Lösungsvektor

$$\vec{C}_\epsilon = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{12} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

und der Matrix

$$M := \left(\vec{M}^1 \mid \dots \mid \vec{M}^{13} \right) \quad (4)$$

Die Spaltenvektoren $\vec{M}^1$ bis $\vec{M}^{12}$ bestehen aus den Koeffizienten der Integrationskonstanten, während der Spaltenvektor $\vec{M}^{13}$ die inhomogenen Teile mit ε_c und ε_c^0 enthält:

$$\vec{M}^{13} = \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot \vec{d}^1 + \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot FM \cdot \vec{d}^2 + \frac{\varepsilon_c}{\tau_c} \cdot \frac{1}{MK} \cdot \vec{d}^3 + \varepsilon_c^0 \cdot \frac{\tau \pi g_c^2}{\tau_c MK} \cdot \vec{d}^4 \quad (5)$$

Die Forderung

$$\det(M) = 0 \quad (6)$$

für das Verschwinden der charakteristischen Determinante des Gleichungssystems (2) läßt sich nun, indem wir die Determinante nach der letzten Spalte $\vec{M}^{13}$ von M entwickeln, darstellen als

$$\varepsilon_c^0 \cdot \frac{\tau}{MK} \cdot \Delta_4 + \varepsilon_c \cdot \frac{1}{MK} \cdot \Delta_3 + \varepsilon_c \cdot FM \cdot \Delta_2 + \varepsilon_c \cdot \Delta_1 = 0 \quad (7)$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung für die Bogenauslenkung ε_c . Sie enthält vier Terme, die die destabilisierende Wirkung des Eigenmagnetfeldes (Term mit Δ_1), den Einfluß eines axialen Fremdmagnetfeldes auf die Bogenstabilität (Δ_2), die thermische Stabilisierung durch asymmetrische Wärmeleitung und Heizung (Δ_3) und die thermische Trägheit aufgrund der Wärmekapazität des Bogengases (Δ_4) jeweils in Abhängigkeit von den Entladungsparametern beschreiben. Die

$$\Delta_\nu = \Delta_\nu(\tau_c/R, R \cdot L, L); \nu = 1(1)4 \quad (8)$$

sind die Unterdeterminanten

$$\Delta_\nu := \det(\vec{M}^1 | \dots | \vec{M}^{12} | \vec{d}^\nu); \quad \nu = 1, 2, 3 \quad (9)$$

und

$$\Delta_4 := \pi s_c^2 \det(\vec{M}^1 | \dots | \vec{M}^{12} | \vec{d}^4) \quad (10)$$

der charakteristischen Determinante. Ihre Werte hängen vom Kanalradius r_c , vom Gefäßradius R , von der Ganghöhe $\lambda = 2\pi/k$ und von der spezifischen Bogenleistung L ab.

4.3.8. Berechnung der charakteristischen Determinante

Für die Berechnung der charakteristischen Determinante bzw. der Unterdeterminanten Δ_ν wurde ein Fortran-Programm entwickelt, das zunächst auf der TR 440-Rechenanlage und nach deren Außerbetriebnahme auf der neuen Cyber 175-Rechenanlage des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt wurde. In diesem Programm werden die Werte der modifizierten Besselfunktionen, die Reihen- und Integralwerte (s. Anhang) und schließlich die Unterdeterminanten Δ_ν berechnet, die dann wie im folgenden Kapitel angegeben weiterverarbeitet werden. Die Δ_ν -Werte wurden für Bogenstromwerte von 6 bis 18 A abhängig von vorgegebenen Werten der normierten Ganghöhe $\lambda/2\pi R$ berechnet. Jeder dieser Rechenzyklen für einen festen Bogenstromwert und einen einzelnen $\lambda/2\pi R$ -Wert benötigte auf der Cyber 175-Anlage eine CPU-Rechenzeit von ca. 1 sec. Eine erste Version des Programms, mit der die Anwachsraten (s. Kap. 4.4.2.), d. h. die Unterdeterminanten Δ_4 , noch nicht berechnet werden konnten, benötigte auf der TR 440-Anlage pro Zyklus eine Kernrechenzeit von ca. 7 sec. Durch den Einsatz der neuen Rechenanlage konnte die Rechenzeit also erheblich vermindert werden, so daß sich eine zügige Abwicklung der Berechnungen

per Dialogbetrieb (Cyber NOS) erreichen ließ. Auf eine Auflistung des Fortran-Programms soll hier verzichtet werden.

4.4. Ergebnisse der Theorie und Vergleich mit dem Experiment

Mit Hilfe der Differentialgleichung 4.3.7. (7) für ϵ_c können wir nun die Stabilitätsgrenzen und die Anwachsrate der magnetischen Lichtbogeninstabilität berechnen. In diesem Kapitel wollen wir die Ergebnisse der Theorie direkt mit den entsprechenden Messungen an einem Wasserstoff-Lichtbogen vergleichen, der in einem wassergekühlten Quarzrohr von 20 mm Durchmesser bei einem Gasdruck von 1040 mbar brennt. Die Experimente werden weiter unten beschrieben.

4.4.1. Stabilitätsgrenzen

Die Differentialgleichung für ϵ_c ermöglicht die Berechnung der marginalen Werte für die Maeckersche Zahl im Fremdmagnetfeld-freien Fall, was bereits die zeitunabhängige Theorie /1/ geleistet hat; wir können diese Werte nun aber auch für den technisch interessanten Fall der Beeinflussung des Bogens mit einem axialen Fremdmagnetfeld berechnen, so daß die stabilisierende oder destabilisierende Wirkung eines solchen Feldes quantitativ beurteilt werden kann.

4.4.1.1. Marginale Werte der Maeckerschen Zahl bei Anwesenheit eines zeitlich konstanten axialen Fremdmagnetfeldes

Zunächst soll die Wirkung eines zeitkonstanten axialen Fremdmagnetfeldes untersucht werden, wobei die Möglichkeit $FM = 0$ (Situation ohne Fremdmagnetfeld) inbegriffen ist. Für

$$\frac{\partial FM}{\partial t} = 0$$

hat Gleichung 4.3.7. (7) die Lösung

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 \cdot e^{\Omega t} \quad (1)$$

Anfängliche Störungen

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k)$$

die eine Ganghöhe $\lambda = 2\pi/k$ haben, wachsen demnach mit einer Anwachsrate Ω , die negativ, gleich Null oder positiv sein kann, exponentiell an. D. h.

$\Omega < 0$: die Störung wird gedämpft; der Bogen ist stabil.

$\Omega > 0$: die Störung wird verstärkt; der Bogen ist instabil.

$\Omega = 0$: für eine begrenzte Störung ε_0 ergibt sich eine beschränkte Bogenauslenkung $\varepsilon_k = \varepsilon_0$; der Bogen ist grenzstabil. Die entsprechenden marginalen Werte für die Maeckersche Zahl, die also die Stabilitätsgrenze kennzeichnen, erhalten wir aus Gl. 4.3.7. (7) mit

$$\Omega = 0 \Rightarrow \varepsilon_c^0 = 0$$

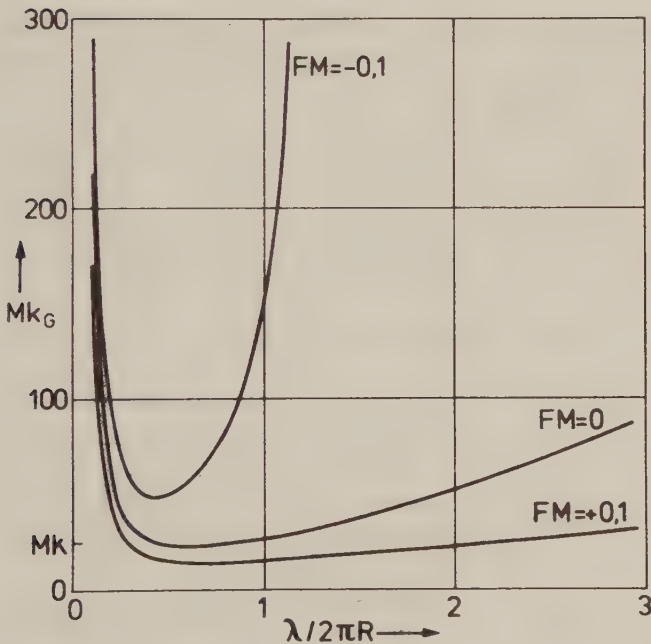
zu

$$Mk_G = \frac{-\Delta_3 / \Delta_1}{1 + FM \cdot \Delta_2 / \Delta_1} \quad (2)$$

Abb. 7 zeigt entsprechende Stabilitätsgrenzkurven für unseren Wasserstofflichtbogen bei $I_B = 10,0 \text{ A}$ und bei Anwesenheit eines axialen Fremdmagnetfeldes von

$$B_a = \pm 2,35 \text{ G} = \pm 0,235 \text{ mT.}$$

Die Stabilitätsgrenzkurve für den Fremdmagnetfeld-freien Fall ($FM = 0$) gibt den bereits in /1/ nachgewiesenen Sachverhalt wieder, daß der Bogen für ein ganzes Spektrum von Ganghöhen instabil gegen entsprechende Störungen ist, wenn die marginalen Werte Mk_G in diesem Ganghöhenbereich von der experimentell realisierten Maeckerschen Zahl (Mk in Abb. 7) überschritten werden.



Stabilitätsgrenzkurven

$R = 10 \text{ mm}$ $p = 1040 \text{ mbar}$
 $I_B = 10,0 \text{ A}$ $B_{\infty} = 23,5 \text{ G}$

Abb. 7 Stabilitätsgrenzkurven

Abb. 7 zeigt nun, daß sich anstelle der $FM = 0$ - Kurve bei Anwesenheit eines axialen Fremdmagnetfeldes

$$\vec{B}_a = FM \cdot B_{oc} \cdot \vec{e}_z ; FM \neq 0 \quad (3)$$

eine Kurve mit größeren Werten für Mk_0 ergibt, wenn das Fremdmagnetfeld die zur positiven Stromrichtung $\vec{e}_z$ entgegengesetzte ($FM < 0$) Richtung hat, und eine Kurve mit kleineren Werten für Mk_0 , wenn das axiale Feld in dieselbe Richtung wie $\vec{e}_z$ weist (FM positiv).

Diese Aufspaltung durch ein axiales zeitkonstantes Fremdmagnetfeld in einen Fall höherer Stabilität bei $FM < 0$ und einen Fall geringerer Stabilität bei $FM > 0$ läßt sich experimentell nun insofern beobachten, als sich bei Antiparallelität von axialem Fremdmagnetfeld und positiver Stromrichtung tatsächlich keine Rechtsschrauben-Bogenhelix einstellt, der Bogen aber für den Fall $FM = -0,1$ der Abb. 7 dennoch nicht stabil ist: es stellt sich dann nämlich eine Linksschrauben-Helix ein, deren Stabilitätsgrenzkurve aus Symmetriegründen identisch mit der unteren Kurve von Abb. 7 ist.

Wir müssen hier daran erinnern, daß unsere Rechnungen mit dem Ansatz 4.2.1. (6) für eine Rechtsschrauben-Orientierung der Bogenhelix durchgeführt wurden. Experimentell konnten wir beweisen (s. u.), daß Links- und Rechtshelix bei jeweils umgekehrter Fremdmagnetfeld-Orientierung absolut gleichwertig sind, was aufgrund der Form der Differentialgleichung für ϵ_c (Gl. 4.3.7. (7)) mit FM als reinem Vorfaktor auch theoretisch zu erwarten war. Für eine konsistente Anwendung dieser Gleichung auf die Stabilitätsuntersuchung wollen wir deshalb der Bogenauslenkung ein Vorzeichen gemäß der folgenden Vereinbarung zuordnen, die auch für ϵ_0 gelten soll:

$$\text{sgn}(\epsilon_c) = m = \begin{cases} +1 & \text{für eine Rechtsschrauben-Helix} \\ -1 & \text{für eine Linksschrauben-Helix} \end{cases} \quad (4)$$

Die Differentialgleichung für ε_c nimmt dann die Form

$$\dot{\varepsilon}_c \cdot \frac{\tau}{MK} \cdot \Delta_4 + \varepsilon_c \cdot \frac{1}{MK} \cdot \Delta_3 + \varepsilon_c \cdot \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot FM \cdot \Delta_2 + \varepsilon_c \cdot \Delta_1 = 0 \quad (5)$$

an, so daß wir anstelle von Gleichung (2) für die marginalen Werte der Maeckerschen Zahl die Beziehung

$$MK_G = \frac{-\Delta_3 / \Delta_1}{1 + \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot FM \cdot \Delta_2 / \Delta_1} \quad (6)$$

erhalten. Zu Abb. 7, die für eine Rechtsschrauben-Bogenhelix gilt, müßte sich dann z. B. noch eine gleiche Abbildung für die Linksschraube gesellen, bei der lediglich die obere Stabilitätsgrenzkurve die Angabe $FM = +0,1$ und die untere die Angabe $FM = -0,1$ erhalten müßte.

4.4.1.2. Marginale Werte für ein zeitkonstantes axiales Fremdmagnetfeld

Gleichung (6) aus dem vorhergehenden Abschnitt zeigt, daß man mit Hilfe eines axialen Fremdmagnetfeldes beliebige Werte für MK_G einstellen kann. Das heißt also, daß der Bogen durch ein Fremdmagnetfeld mit einem bestimmten Wert von FM für eine gegebene Ganghöhe an die Stabilitätsgrenze gebracht werden kann. Für diese marginalen Werte FM_G des Fremdmagnetfeld-Faktors finden wir:

$$FM_G = \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot \left(\frac{MK_{G0}}{MK} - 1 \right), \quad (1)$$

indem wir die Differentialgleichung 4.4.1.1. (5) für ε_c unter den Bedingungen $\dot{\varepsilon}_c = 0$ und $\partial FM / \partial t = 0$ lösen und die Abkürzung

$$MK_{G0} := MK_G (FM = 0) = - \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \quad (2)$$

benutzen. Der Faktor $\text{sgn}(\mathcal{E}_z)$ drückt aus, daß das Fremdmagnetfeld für eine Linksschrauben-Bogenhelix die entgegengesetzte Richtung wie bei der Rechtsschraubenhelix haben muß, um den gleichen Effekt zu erzielen.

Abb. 8 zeigt solche Fremdmagnetfeld-Stabilitätsgrenzkurven für den Rechtsschraubenfall, berechnet für verschiedene Bogenstromstärken unseres Wasserstoff-Lichtbogens (die entsprechenden Kurven für die Linksschraubenhelix liegen spiegelbildlich zur Abzissenachse $FM_G = 0$).

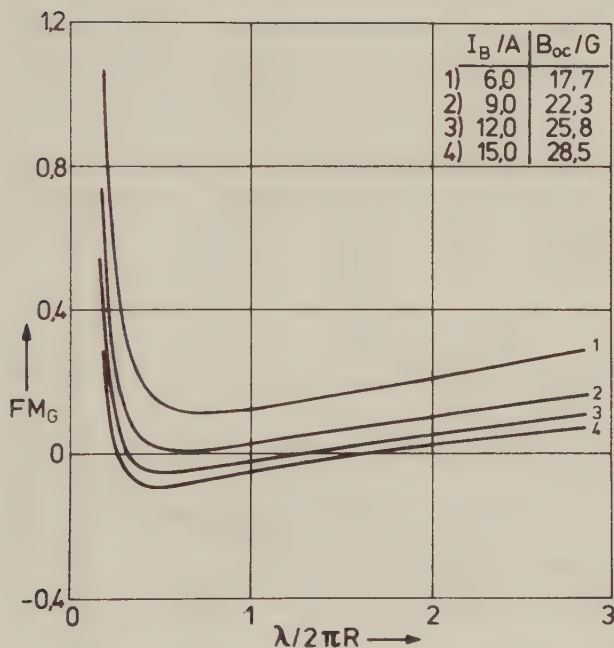
Dabei geben die oberen beiden Kurven die Verhältnisse für den "eigenstabilen" Bereich unterhalb der Grenzstromstärke an, bei welcher der Bogen durch sein Eigenmagnetfeld bei Abwesenheit eines Fremdmagnetfeldes instabil wird, während die unteren beiden Kurven die Verhältnisse für den "eigeninstabilen" Bereich oberhalb der Grenzstromstärke zeigen. Man erhält Werte $FM_G > 0$ für $Mk < Mk_{G0}$ und negative marginale Werte für FM, wenn $Mk > Mk_{G0}$ ist. Ein Fremdmagnetfeld in $+\vec{e}_z$ -Richtung wirkt also destabilisierend, während ein axiales Fremdmagnetfeld mit $-\vec{e}_z$ -Ausrichtung stabilisierend wirkt (für die Linksschrauben-Bogenhelix gelten die entsprechend umgekehrten Aussagen).

Das Minimum (für $\mathcal{E}_z > 0$) bzw. Maximum (für $\mathcal{E}_z < 0$) der Stabilitätsgrenzkurven für den Fremdmagnetfeld-Faktor gibt dann den kritischen Wert

$$FM_{cr} := \begin{cases} \text{Min}(FM_G) \text{ für } \mathcal{E}_z > 0 & (\text{Rechtsschraube}) \\ \text{Max}(FM_G) \text{ für } \mathcal{E}_z < 0 & (\text{Linksschraube}) \end{cases} \quad (3)$$

für FM an. Bei diesem Wert befindet sich der Bogen für eine Störung mit der entsprechenden Ganghöhe .

$$\lambda_{cr} := \lambda(FM_{cr}) \quad (4)$$



Marginales Fremdmagnetfeld

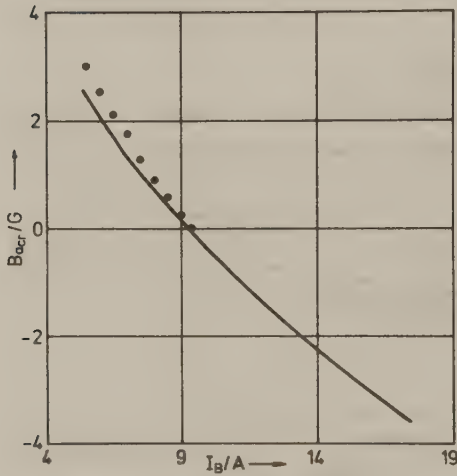
$R = 10 \text{ mm}$ $p = 1040 \text{ mbar}$

Abb. 8 Marginales Fremdmagnetfeld

an der Stabilitätsgrenze. Mit diesen Werten läßt sich nun der kritische Wert für die jeweilige magnetische Induktion

$$B_{a_{\text{crit}}} := FM_{\text{crit}} \cdot B_{0c} \quad (5)$$

abhängig von der Bogenstromstärke berechnen. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist zusammen mit den zugehörigen experimentellen Ergebnissen (Punkte) in Abb. 9 dargestellt (Rechtsschrauben-Darstellung).



Kritische Fremdmagnetfeld - Stärke

$R = 10 \text{ mm}$

$p = 1040 \text{ mbar}$

$$\bullet B_{a_{cr}} = B_m + B_{E_1} = B_m - B_{E_1}$$

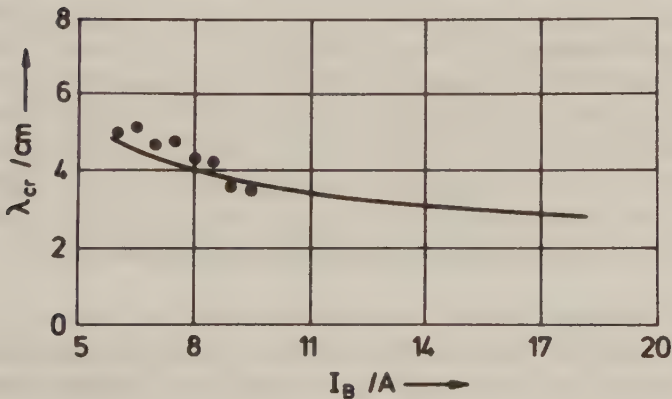
B_{E_1} kompensiert

Abb. 9a Kritische Werte für das axiale Fremdmagnetfeld

Die Meßpunkte geben sowohl die Verhältnisse für die Rechtsschrauben-Bogenhelix als auch für die Linksschrauben-

Orientierung an: die Beträge der destabilisierenden Magnetfelder sind für beide Fälle gleich und ergeben sich, wie in der Abbildung angegeben, als Summe bzw. als Differenz der magnetischen Flußdichten des künstlich erzeugten Feldes $\mathcal{B}_{m\uparrow}$ in $+\vec{e}_z$ - bzw. $\mathcal{B}_{m\uparrow}$ in $-\vec{e}_z$ -Richtung und der Vertikal-komponente $\mathcal{B}_{E\perp}$ des Erdmagnetfeldes. Man sieht, daß bereits geringe Werte von wenigen Gauß ausreichen, um den Bogen an die Stabilitätsgrenze zu bringen.

Die folgende Abbildung zeigt die theoretischen und experimentellen Werte für die kritische Ganghöhe im Einsatzpunkt der Instabilität, der durch das entsprechende Magnetfeld



Kritische Ganghöhe

$p = 1040 \text{ mbar}$ $R = 10 \text{ mm}$

Meßpunkte: $\lambda_{cr} \pm 5\%$

Abb. 9b Kritische Werte der Ganghöhe

B_{acr} gemäß Abb.9a für den jeweiligen Bogenstrom eingestellt wurde.

Die experimentellen Ergebnisse bestätigen die theoretischen Aussagen sowohl für die kritischen Fremdmagnetfeld-Werte als auch für die kritischen Ganghöhenwerte sehr genau, die geringen Abweichungen liegen im Rahmen der Unsicherheiten, die durch mögliche Ungenauigkeiten des Kanalradius r_c und des Mittelwerts α für $(\partial \lambda / \partial (1/s_m))_p$ vorgegeben sind (s. Anhang). Der Meßwert $I_{B_0} = 9,35 \text{ A}$ für die Grenzstromstärke, bei der die Entladung allein durch ihr Eigenmagnetfeld instabil wird ($FM = 0$), stimmt mit dem berechneten Wert von $9,3 \text{ A}$ vollständig überein (Meßgenauigkeit $\pm 1\%$).

Das Fehlen von experimentellen Punkten für den negativen Teil der B_{acr} - und den zugehörigen Teil der λ_{cr} -Kurve erklärt sich folgendermaßen: im Bereich $I_B > I_{B_0}$ ist der Bogen instabil, bildet also eine Helix wachsender Amplitude (bei $FM = 0$ entstehen mit gleicher Häufigkeit Rechts- und Links-schraubensinn-Orientierungen). Ein Bogenstrom von mehr als $9,5 \text{ A}$ führt zur Zerstörung des Bogengefäßes, so daß die B_{acr} -Kurve für den eigeninstabilen Bereich ohnehin nur für Bogenstromwerte $9,35 \text{ A} < I_B \leq 9,5 \text{ A}$ geprüft werden könnte.

Aber selbst dies mißlingt, weil der Versuch, den eigeninstabilen Bogen mit einem zeitkonstanten axialen Fremdmagnetfeld an die Stabilitätsgrenze zu bringen (wobei $sgn(FM) = -sgn(\epsilon_c)$ gelten muß), lediglich zum Umklappen der Helix-Orientierung führt. Sobald das Fremdmagnetfeld den kritischen Wert überschreitet, führt die Bogenhelix eine Bewegung aus, die damit endet, daß die nun umgekehrte Bogenhelix durch das Fremdmagnetfeld zusätzlich angetrieben wird. Die Ursache für das Umklappen der Helix-Orientierung liegt natürlich darin, daß der Bogen im eigeninstabilen Bereich bei Anwesenheit eines axialen Fremdmagnetfeldes für Störungen entsprechender Orientierung besonders instabil ist (vgl. Abschn. 4.4.1.1.).

Durch ein zeitkonstantes axiales Fremdmagnetfeld läßt sich der bereits helikal verformte Bogen also allenfalls für sehr kurze Zeiten an die Stabilitätsgrenze bringen. Die entsprechenden scheinbar nur theoretischen Teile der Kurven für β_{acr} und λ_{cr} liefern uns daher dennoch praktisch wichtige Aussagen über die Ganghöhen- und die Magnetfeld-Werte, mit denen wir bei dem Versuch einer Regelkreis-Stabilisierung eines an sich instabilen Bogens zu rechnen haben. Die Möglichkeit einer solchen Stabilisierung durch ein zeitlich variables Fremdmagnetfeld wird weiter unten aufgezeigt.

Wir wenden uns daher nun den speziell zeitabhängigen Ergebnissen der Theorie zu.

4.4.2. Anwachsrate der Instabilität

Die Differentialgleichung für ε_c ermöglicht es uns, auch den Fall nicht-verschwindender Anwachsrate der magnetischen Bogeninstabilität quantitativ zu untersuchen. Zunächst wollen wir den Fremdmagnetfeld-freien Fall diskutieren.

4.4.2.1. Anwachsrate ohne Fremdmagnetfeld

Die Lösung von Gleichung 4.4.1.1. (5), der Differentialgleichung für ε_c mit Berücksichtigung der Helix-Orientierung, ist identisch mit Gleichung 4.4.1.1. (1) für den Fall $FM = 0$:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 e^{\Omega t} \quad (1)$$

Damit erhalten wir

$$\underline{FM = 0}$$

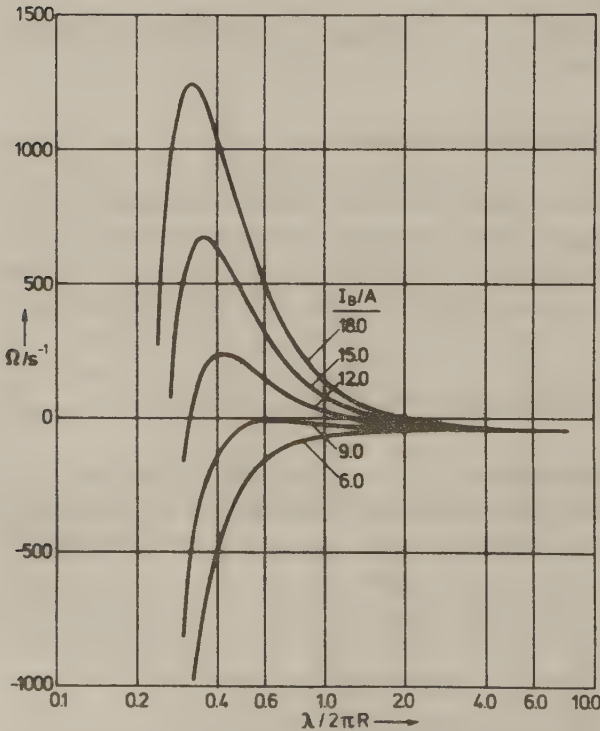
$$\Omega = \Omega_0 := \frac{1}{\tau} \cdot \frac{-\Delta_1}{\Delta_4} \cdot (MK - MK_{G0}) \quad (2)$$

Diese Gleichung zeigt sehr schön, daß der Bogen im Fremd-magnetfeld-freien Fall instabil ist, wenn der experimentell realisierte Wert der Maeckerschen Zahl den Grenzwert Mk_{Go} überschreitet:

$$Mk > Mk_{Go} \Rightarrow \Omega_o > 0 \quad (\text{Instabilität}) \quad (3)$$

und stabil ist, wenn der Wert Mk_{Go} nicht erreicht wird:

$$Mk < Mk_{Go} \Rightarrow \Omega_o < 0 \quad (\text{Stabilität}) \quad (4)$$



Anwachsraten für Störungen der Ganghöhe λ

$R = 10 \text{ mm}$ $p = 1040 \text{ mbar}$ $B_o = 0$

Abb. 10 Anwachsraten Ω_o

Abb. 10 zeigt entsprechende Kurven für unseren Wasserstoff-Lichtbogen; die Anwachsrate ist über der normierten Ganghöhe $\lambda/2\pi R$ aufgetragen. Der Bogen ist demnach bei $I_B = 9,0 \text{ A}$ noch für alle Störungen (λ beliebig) stabil. Dies stimmt mit unserer experimentellen Beobachtung, die einen Grenzwert $I_{B_0} = 9,35 \text{ A}$ zeigt, überein. Für Bogenstromstärken, bei denen Abb. 10 positive Anwachsrate voraussetzt, geben wir die Ergebnisse der experimentellen Prüfung weiter unten an (Abb. 12). Es ist klar, daß experimentell das Maximum der Ω_0 -Kurven zu beobachten sein sollte, sofern die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Ganghöhe nicht vom Wert der Ganghöhe selbst abhängt. Das Experiment bestätigt diese Erwartung und zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Meßwerte der Anwachsrate mit den zugehörigen Maximumswerten der theoretischen Ω_0 -Kurven (s.u.).

4.4.2.2. Anwachsrate mit zeitkonstantem axialen Fremdmagnetfeld

Für den Fall der Anwesenheit eines zeitlich konstanten axialen Fremdmagnetfeldes

$$FM \neq 0, \quad \partial FM / \partial t = 0$$

hat die Differentialgleichung 4.4.1.1. (5) für ε_κ ebenfalls die Lösung

$$\varepsilon_\kappa = \varepsilon_0 \cdot e^{\Omega t} \quad (1)$$

Die Anwachsrate einer Störung $\varepsilon_0(\kappa)$ hängt aber jetzt sowohl von der helikalen Orientierung der Störung als auch von Betrag und Richtung des Fremdmagnetfeldes ab: wird dem Bogen im eigenstabilen Bereich ein destabilisierendes Fremdmagnetfeld aufgeschaltet, das dann zeitlich konstant bleibt, so wächst eine Störung ε_0 , deren Orientierung durch $\text{sgn}(\varepsilon_0) = \text{sgn}(FM)$

gegeben ist, beobachtbar an, während Störungen für den entgegengesetzten Schraubensinn durch die Anwesenheit des Magnetfeldes zusätzlich gedämpft werden. Entsprechend gilt, daß beim Einschalten des Fremdmagnetfeldes im Fall einer bereits vorhandenen Bogenauslenkung ϵ_0 für einen eigeninstabilen Bogen die Anwachsrate für diese anfängliche Bogenauslenkung durch das Fremdmagnetfeld noch vergrößert wird, falls $\text{sgn}(FM) = \text{sgn}(\epsilon_c)$ gewählt wurde, und verringert wird, wenn das Fremdmagnetfeld die entgegengesetzte Richtung hat. Für die Anwachsrate gilt:

$$\underline{FM \neq 0, \partial FM / \partial t = 0}$$

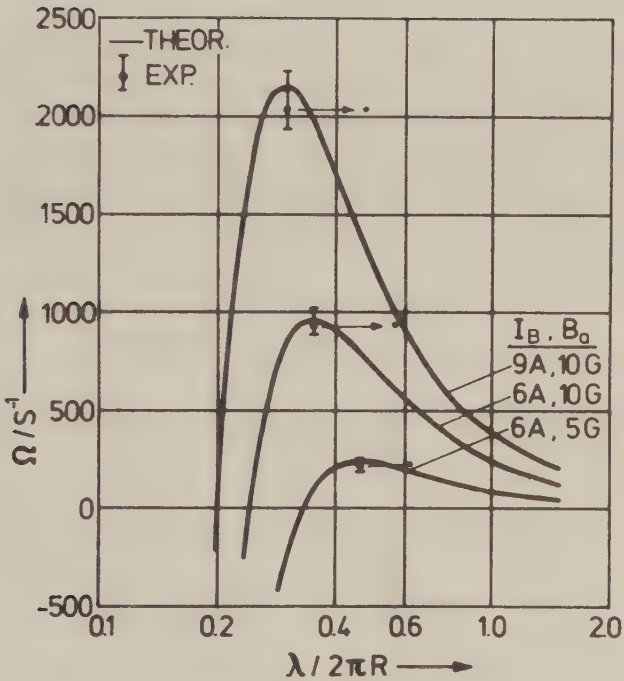
$$\Omega = \Omega_B := \Omega_0 \cdot \left(1 - \frac{FM}{FM_G}\right) \quad (2)$$

mit (s. o.)

$$FM_G = \text{sgn}(\epsilon_c) \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdot \left(\frac{Mk_{G0}}{Mk} - 1\right) \quad (3)$$

Wird im eigeninstabilen Fall die Anwachsrate durch das Fremdmagnetfeld negativ gemacht, so erfolgt das bereits oben geschilderte Umklappen des Schraubensinns der Bogenhelix, wodurch Ω dann wieder positiv wird (FM_G ändert beim Umklappen der Helix-Orientierung sein Vorzeichen).

In Abb. 11 sind Ω_B -Kurven für den eigenstabilen Bereich ($I_B < I_{B_G}$) über der normierten Ganghöhe aufgetragen. Experimentell erwarten wir wieder, daß das Anwachsen einer solchen Störung zu beobachten sein sollte, deren Ganghöhe der Lage des jeweiligen Kurvenmaximums entspricht. Während wir eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen den theoretischen Maximumswerten für die Anwachsrate und den Meßwerten finden, fällt jedoch auf, daß die theoretischen Ganghöhenwerte mit wachsender Anwachsrate zunehmend zu gering ausfallen (die Pfeile in Abb. 11 weisen auf die korrekt eingetragenen Meßpunkte hin; die mit Fehlerbalken versehenen



Anwachsraten für Störungen der
Ganghöhe λ

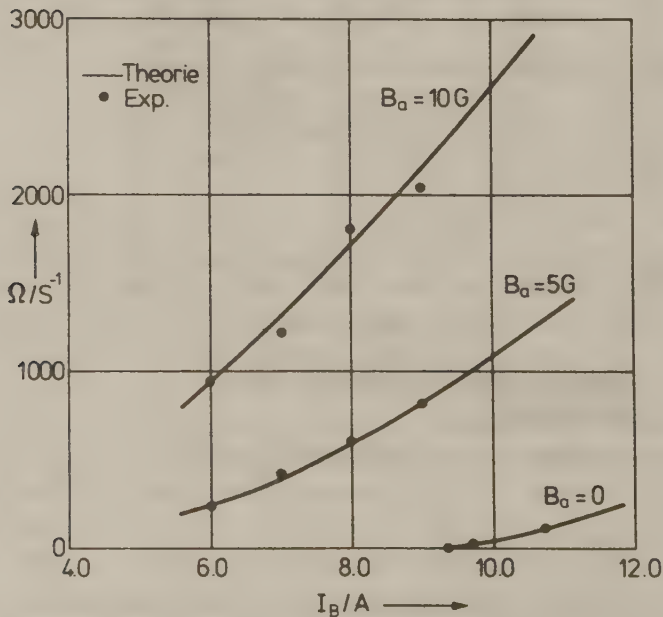
$R = 10\text{mm}$ $p = 1040\text{ mbar}$ $B_0 \neq 0$

Abb. 11 Anwachsraten Ω_3

Punkte verdeutlichen die sehr gute Übereinstimmung der Meßwerte mit den theoretischen Anwachsraten). Die Ganghöhen-Differenzen, die bei kleiner Anwachsrate noch unwesentlich sind (vgl. Abb. 9b mit $\Omega \approx 0$), bei großer Anwachsrate ($> 500/\text{sec}$) jedoch schon an die 40% betragen, deuten

auf eine Unterbewertung der Viskosität des Bogengases in der Theorie. Wir kommen darauf später zurück (Mehrbereichsmodell, Abschn. 4.5.7.).

In Abb. 12 sind nun die theoretischen Maximumswerte für die Anwachsraten, die wir kritische Anwachsraten nennen wollen, über der Bogenstromstärke aufgetragen, wobei der Betrag des axialen Fremdmagnetfeldes als Parameter angegeben ist. In dieser Abbildung sind auch die Anwachsraten für den eigeninstabilen Bereich oberhalb der Grenzstromstärke, ohne Fremd-



Kritische Anwachsraten

$R = 10\text{mm}$ $p = 1040\text{ mbar}$

Abb. 12 Anwachsraten ohne und mit axialem Fremdmagnetfeld

magnetfeld, angegeben. Die Meßpunkte geben die tatsächlich beobachteten Anwachsrate mit einem Meßfehler von max. ca. +5 und -10% wieder. Die Anwachsrate für links- und rechts-helikale Störungen stimmen im Rahmen dieser Meßgenauigkeit experimentell überein.

Die Ω_0 -Punkte für den eigeninstabilen Bereich mit $FM = 0$ bei Bogenstromwerten von 9,7 A und 10,7 A wurden mit Hilfe einer Regelkreisstabilisierung des an sich instabilen Bogens gemessen, indem die Regelung für die Anwachsrate-Messung kurzzeitig ausgetastet wurde. Die Möglichkeit zu einer solchen künstlichen Stabilisierung zeigt unsere Theorie auf, wenn wir die Differentialgleichung für ϵ_c unter der Bedingung $\partial FM / \partial t \neq 0$ lösen.

4.4.2.3. Anwachsrate mit zeitlich veränderlichem axialen Fremdmagnetfeld: Stabilisierungsmöglichkeit

Für den Fall der Einwirkung eines zeitlich variablen axialen Fremdmagnetfeldes

$$\vec{B}_a(t) = FM(t) \cdot B_{0c} \cdot \vec{e}_z \quad (1)$$

auf unseren Lichtbogen liefert die Differentialgleichung

4.4.1.1. (5) für ϵ_c die Lösung

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \cdot \exp \left[\Omega_0 \cdot \int_0^t \left(1 - \frac{FM(t')}{FM_G(m)} \right) dt' \right] \quad (2)$$

wobei berücksichtigt werden muß, daß das Vorzeichen von FM_G vom Schraubungssinn

$$m = \operatorname{sgn}(\epsilon_c) \quad (3)$$

der Bogenhelix abhängt: sobald die Helix-Orientierung umklappt, ändert FM_G seine Polarität.

Wir untersuchen nun den eigeninstabilen Bereich

$$I_B > I_{B_G} \quad (4)$$

in der Nähe der Stabilitätsgrenze. Bei kleiner Bogenauslenkung

$$|\varepsilon_c| \ll R \quad (5)$$

ist

$$FM_G \approx FM_{cr}. \quad (6)$$

Für das Vorzeichen von FM_{cr} gilt dann

$$\operatorname{sgn}(FM_{cr}) = -\operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \quad (7)$$

(vgl. Abb. 8: negativer Bereich der Kurven 3) und 4) für eine Rechtsschrauben-Orientierung der Bogenhelix). Wir können anstelle von Gleichung (2) in diesem Fall schreiben

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 \cdot \exp \left[\Omega_0 \cdot \int_0^t \left(1 + \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot \frac{FM(t')}{|FM_{cr}|} \right) dt' \right] \quad (8)$$

Diese Gleichung zeigt, daß es möglich sein sollte, den eigeninstabilen Lichtbogen mit Hilfe eines Regelsystems magnetisch zu stabilisieren, welches dafür sorgt, daß das Produkt

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot \frac{FM(t)}{|FM_{cr}|} \stackrel{!}{\leq} -1. \quad (9)$$

für fast alle t ist. Das Regelsystem müßte dann also dafür sorgen, daß die Richtung eines axialen Fremdmagnetfeldes geeigneter Stärke schnell genug wieder um 180° gedreht wird, sobald die Schraubenrichtung der Helix umklappt und damit das vorher stabilisierend wirkende Fremdmagnetfeld plötzlich destabilisierend wirkt.

Über die Realisierung eines solchen Regelkreises und die erfolgreiche Stabilisierung eines an sich instabilen Lichtbogens wird im experimentellen Teil der vorliegenden Arbeit berichtet: wir finden auch in diesem Punkt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der theoretischen Voraussage und der experimentellen Verwirklichung.

Bevor wir zum experimentellen Teil kommen, wollen wir jedoch zunächst noch über eine zusätzliche Weiterentwicklung der Theorie berichten, die uns eine nähere Untersuchung einiger Eigenschaften des bis hier benutzten theoretischen Modells für den Lichtbogen erlaubt.

4.5. Erweiterung der Theorie durch die Einführung eines Mehrbereichmodells für den Bogenquerschnitt

Bei der bisherigen Rechnung haben wir drei relativ grobe Vereinfachungen benutzt ($\sigma = \sigma_c$, $(\partial L / \partial (1/s_M))_p = \alpha$ und $\vec{E} = \vec{E}_c$, s. u.). Zwei dieser Näherungen wollen wir nun durch eine Verfeinerung der Theorie beseitigen. Damit wird es dann möglich, die Grenzen des einfachen Bogenmodells hinsichtlich der Anwendbarkeit auf Lichtbögen mit anderen Eigenschaften, als sie der Wasserstoffbogen hat, theoretisch zu untersuchen.

4.5.1. Mehrbereichsmodell für den Bogenquerschnitt

Die beiden wesentlichen Vereinfachungen, die wir zusätzlich zum einfachen Kanalmodell $\sigma(\tau) = \sigma_0$ für $|\tau| \leq \tau_0$ bei unserer Stabilitätsuntersuchung gemacht haben, sind

1. die Ersetzung der Größe $(\partial h / \partial (1/s_m))_p(\tau)$, die über

$$s_m \frac{dh}{dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial (1/s_m)} \right)_p \cdot \text{div } \vec{v} \quad (1)$$

mit der Energiegleichung (s. Kap. 4.3.5.) und der Bewegungsgleichung (s. Kap. 4.3.4.3.) für den Lichtbogen verknüpft ist, durch einen konstanten Mittelwert

$$\alpha := \langle (\partial h / \partial (1/s_m))_p \rangle \quad (2)$$

und 2. die Approximation der Zeitableitung $\partial \hat{S}_0 / \partial t = -\xi(\tau, k, t) dS_0/d\tau$ in der Energiegleichung durch

$$\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial t} = -\epsilon_0 \cdot \frac{dS_0}{d\tau} \quad (3)$$

(s. Kap. 4.3.5.1.). Für die Zeitableitungs-Näherung wurde also die ortsabhängige Isothermengeschwindigkeit durch ihren Wert am Rand des stromführenden Bogenkanals ersetzt.

Die erste Vereinfachung ist wegen der Tatsache, daß die Größe $(\partial h / \partial (1/s_m))_p$ im Dissoziationsgebiet des Bogen-gases ein ausgeprägtes Maximum hat (vgl. Abb. 34 im Anhang), möglicherweise problematisch. Die zweite Vereinfachung wird vor allem bei größeren Anwachsrate zu Fehlern führen, weil mit wachsender Anwachsrate die Unterschiede zwischen den ortsabhängigen Werten der Isothermengeschwindigkeit und ihrem Wert am Kanalrand immer größer werden. Die näherungs-

weise Gleichsetzung dieser Werte für die Zeitableitung in der Leistungsbilanz führt unter anderem zu einer fehlerhaften Berücksichtigung der Wärmekapazität des Bogengases.

Diese Näherungen beseitigen wir durch ein Mehrbereichsmodell für den Bogenquerschnitt. Die spezielle Approximation des stromführenden Bogenkanals durch einen einzigen elektrisch leitenden Bereich mit konstanter Leitfähigkeit wollen wir jedoch zur Reduzierung des Rechenaufwandes auch im folgenden beibehalten. Dieses Kanalmodell ist vor allem für diffuse oder stromstarke Bögen problematisch, bei denen der Strom über nahezu den gesamten Gefäßquerschnitt verteilt ist, wobei die Stromdichte stark variiert. Unser Mehrbereichsmodell zeigt allerdings auch den Weg zur Überwindung dieser dritten relativ groben Vereinfachung auf.

Wir nähern nun den Bogenquerschnitt in einer Ebene senkrecht zur Gefäßachse folgendermaßen an (Abb. 13): in der Ausgangslage (ungestörter Bogen) lassen sich konzentrische Isothermenkreise mit den Radien $\tau_v = \tau_0$ bis τ_n angeben, auf denen das Wärmestrompotential den jeweils zugehörigen Wert $S(\tau_v)$ hat. Für die Größe $(\partial h / \partial (1/s_m))_p$ führen wir die Werte

$$\alpha_v := \langle (\partial h / \partial (1/s_m))_p \rangle_v ; \quad v = 0(1)n \quad (4)$$

ein, die durch Mittelung der $(\partial h / \partial (1/s_m))_p$ -Kurven aus 1/ über den jeweiligen Bereich τ_{v-1} bis τ_v zu

$$\alpha_v = \frac{\frac{\tau_v/R}{\tau_{v-1}/R} \cdot 2 \int_{\tau_{v-1}/R}^{\tau_v/R} (\partial h / \partial (1/s_m))_p \frac{\tau}{R} d\left(\frac{\tau}{R}\right)}{\left(\frac{\tau_v}{R}\right)^2 - \left(\frac{\tau_{v-1}}{R}\right)^2} ; \quad v = 0(1)n \quad (5)$$

$;\tau_0 := 0$

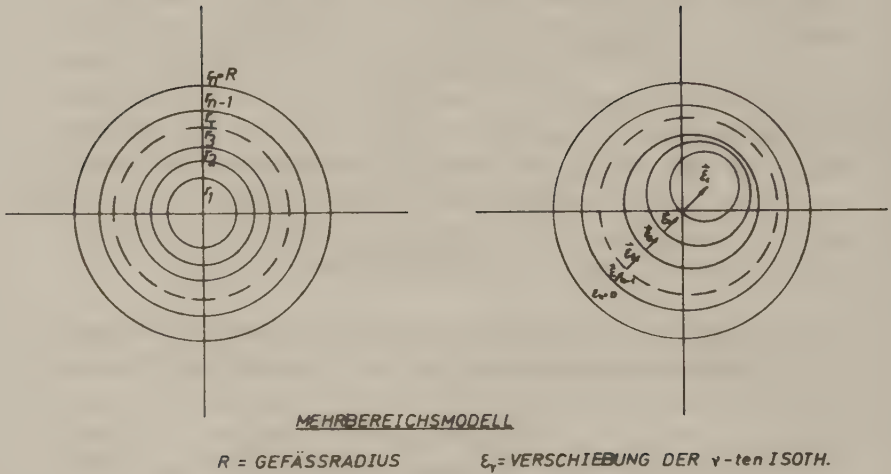


Abb. 13 Mehrbereichsmodell

folgen. Die α_v -Verteilung schmiegt sich dann für $(\tau_v - \tau_{v-1}) \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ immer besser an die wahre $(\partial h / \partial (1/S_M))_p$ -Kurve an. Wir wollen jedoch, wie oben gesagt, die Kanalmodell-Näherung für den stromführenden Bogenbereich beibehalten, so daß

$$\tau_0 := \tau_c \quad (6)$$

immer der Radius des leitfähigen Kanals ist, und zwar unab-

hängig von der Anzahl n der Außenbereiche. $r_n = R$ ist der Gefäßradius.

Die Bogenbewegung können wir nun mit Hilfe der n ausgewählten Isothermen darstellen als

$$\vec{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_0(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Die Auslenkung entwickelt sich dann aus einer anfänglichen Störung

$$\vec{\varepsilon}(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

mit der Geschwindigkeit

$$\overset{\circ}{\vec{\varepsilon}}(t) = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\varepsilon}_0(t) \\ \vdots \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Die Zeitableitungen $\partial S / \partial t$ in der Energiegleichung approximieren wir nun genauer als bisher (Kap. 4.3.5.1.) durch

$$\frac{\partial \hat{S}_{1,v}}{\partial t}(\tau, k, t, \varphi, z) = - \overset{\circ}{\varepsilon}_v(\tau, k, t) \cdot \frac{dS_0}{d\tau}(\tau) \quad (10)$$

für $S_{1,0} := S_1^i$ im Bereich $0 \leq |\tau| \leq r_0$ und für $S_{1,v}$ in den Bereichen

$\tau_{r-1} < |r| \leq \tau_r$, $v = 1(1)n-1$. Im wandnächsten Bereich $\tau_{n-1} < |r| \leq \tau_n$ approximieren wir

$$\frac{\partial S_{1,n}}{\partial t} = - \overset{\circ}{E}_{n-1} \cdot \frac{dS_0}{dr} \cdot e^{i(\psi - kz)} \quad (11)$$

Wir ersetzen somit bei dieser Näherung für die Zeitableitungen des Wärmestrompotentials die ortsabhängigen Isothermengeschwindigkeiten in den verschiedenen Bereichen durch die jeweiligen Isothermengeschwindigkeiten an den zugehörigen kreisförmigen Außenrändern des Innenbereichs bzw. der ringförmigen Außenbereiche. Weil die Gefäßwand ruht ($E_n = 0$), nähern wir die Zeitableitung im äußersten Bereich an der Gefäßwand mit Hilfe der Isothermengeschwindigkeit auf dem vorletzten Bereichsrand an (Gl. (11)).

Für $(\tau_r - \tau_{r-1}) \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ erhalten wir auf diese Weise eine immer bessere Approximation der wahren Zeitableitung $\partial \hat{S}_1 / \partial t = - \hat{E}(\tau, k, t) dS_0 / dr$.

Für dieses Mehrbereichsmodell suchen wir nun neue Lösungen des Differentialgleichungssystems aus Impuls- und Leistungsbilanz (Gleichungen 4.3.4. (2) und 4.3.5. (1)), wozu wir wieder eine lineare Störungsrechnung wie beim einfachen Modell durchführen. Die Stromdichte und das Magnetfeld brauchen wir wegen der Beibehaltung des Kanalmodells für den stromführenden Bogenbereich nicht neu zu berechnen; aus demselben Grund werden sich auch die anderen Lösungen für den Innenbereich kaum verändern. Für den Außenbereich erwarten wir jedoch möglicherweise 8 n Integrationskonstanten $C_{5,v}$ bis $C_{12,v}$ für die n Außenbereiche statt der bisherigen Konstanten C_5 bis C_{12} . Einige der neuen Konstanten werden wir aufgrund von Stetigkeitsforderungen an den Bereichsgrenzen jedoch sofort eliminieren können.

Da sich der Gang der Rechnung bis zur Lösung der Impulsbilanz nicht ändert, können wir uns nun sogleich der Impulsbilanz zuwenden.

4.5.2. Mehrbereichslösungen der Impulsbilanz

Anstelle von allen Impulsbilanz-Komponenten werden wieder die Divergenz der Impulsbilanz, die z-Komponente ihrer Rotation und die z-Komponente der Impulsbilanz selbst gelöst.

Für die Lösungen der Divergenz der Impulsbilanz erhalten wir:

- a) Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_0$

Es gilt weiterhin die Lösung 4.3.4.1. (7) für $\hat{q}_1^{*i}$.

- b) Außenbereiche $s_{\gamma-1} < |s| \leq s_\gamma$, $\gamma = 1(1)n$

Wir erhalten die Lösungen für $q_1^a = \frac{4}{3} \gamma \operatorname{div} \vec{v}_1^a - p_1^a$ zu

$$\hat{q}_{1,\gamma}^{*a} = C_{7,\gamma} I_1(s) + C_{8,\gamma} K_1(s).$$

Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{div} \vec{v}_1^a$ (vgl. Abschn. 4.3.6. (5)) und der Stetigkeit von p im Außenbereich gilt jedoch:

$$\hat{q}_{1,\gamma}^{*a}(s_\gamma) = \hat{q}_{1,\gamma+1}^{*a}(s_\gamma); \quad \gamma = 1(1)n-1.$$

Wegen der Stetigkeit von $\vec{v}_{1r}$ und von $d\vec{v}_{1r}/dt$ und $d\vec{v}_{1z}/dt$ (vgl. Abschn. 4.3.6. (6-10)) gilt außerdem:

$$\left. \frac{d\hat{q}_{1,\gamma}^{*a}}{ds} \right|_{s=s_\gamma} = \left. \frac{d\hat{q}_{1,\gamma+1}^{*a}}{ds} \right|_{s=s_\gamma}; \quad \gamma = 1(1)n-1.$$

Es folgt

$$C_{7,\gamma} = C_7 \quad \forall \gamma, \quad C_{8,\gamma} = C_8 \quad \forall \gamma.$$

Somit gilt weiterhin die Lösung 4.3.4.1. (8) für $\hat{q}_1^{*a}$.

Für die Lösungen der z-Komponente der Rotation der Impulsbilanz erhalten wir:

a) Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_0$

Es gilt weiterhin die Lösung 4.3.4.2. (9) für $\hat{\omega}_{12}^{*i}$.

Außerdem gelten weiterhin die Lösungen 4.3.4.2. (12) für $\hat{\omega}_{14}^{*i}$ und 4.3.4.2. (15) für $\hat{\omega}_{17}^{*i}$.

b) Außenbereiche $s_{\nu-1} < |s| \leq s_\nu$, $\nu = 1(1)n$

Wir erhalten die Lösungen $\hat{\omega}_n^a = \text{rot } \vec{v}_n^a$ zu

$$\hat{\omega}_{12}^{*a} = C_{11,\nu} \cdot I_1(s) + C_{12,\nu} \cdot K_1(s)$$

für die z-Komponente von $\vec{\omega}_1$, womit sich dann wie in Kap. 4.3.4.2. die beiden anderen Komponenten berechnen lassen.

Hier treten zunächst jeweils n Integrationskonstanten C_{11} und C_{12} auf. Wegen der Stetigkeit von v_{14}^a (Abschnitt 4.3.6. (7)) und von q_1^a erhalten wir jedoch:

$$\left. \frac{d\hat{\omega}_{12,\nu}^{*a}}{ds} \right|_{s=s_\nu} = \left. \frac{d\hat{\omega}_{12,\nu+1}^{*a}}{ds} \right|_{s=s_\nu}, \quad \nu = 1(1)n-1.$$

Außerdem gilt wegen der Stetigkeit von dv_{14}/ds (vgl. Abschn. 4.3.6. (9)) die Beziehung

$$\hat{\omega}_{12,\nu}^{*a}(s_\nu) = \hat{\omega}_{12,\nu+1}^{*a}(s_\nu), \quad \nu = 1(1)n-1$$

Es folgt

$$C_{11,\nu} = C_{11} \quad \forall \nu, \quad C_{12,\nu} = C_{12} \quad \forall \nu.$$

Somit gilt weiterhin die Lösung 4.3.4.2. (10) für $\hat{w}_{12}^{*a}$.
 Außerdem gelten weiterhin die Lösungen 4.3.4.2. (13)
 für $\hat{w}_{1\gamma}^{*a}$ und 4.3.4.2. (16) für $\hat{w}_{1\tau}^{*a}$.

Die Lösungen der z-Komponente der Impulsbilanz weichen
 nun aber von den alten Lösungen ab, weil diese Gleichung
 durch den Ausdruck für $\text{div} \vec{v}_2$ mit der Energiegleichung
 gekoppelt ist, in die nun die α_v -Werte und die $\partial S_{1,v}/\partial t$ -
 Näherungen eingehen. Wenn wir $\hat{w}_2^{*i}$ durch

$$\hat{w}_1^{*i} := \hat{v}_{12}^{*i} - \frac{\pi^2 \rho_c^3}{Mk_c} \cdot \hat{S}_1^{*i} \quad (1)$$

neu definieren (man beachte, daß hier der Wert Mk_c statt
 des bisherigen Wertes Mk auftritt), so gilt im Innenbe-
 reich $0 \leq |\rho| \leq \rho_c$ wieder die alte Lösung 4.3.4.3. (20) für
 dieses $\hat{w}_1^{*i}$. Der Grund für die Neudefinitionen für
 $\hat{w}_1$ wird klarer, wenn wir die Energiegleichung behan-
 deln (s. u.).

Für die Außenbereiche definieren wir

$$\hat{w}_{1,\gamma}^{*a} := \hat{v}_{12,\gamma}^{*a} - \frac{\pi^2 \rho_c^3}{Mk_\gamma} \cdot \hat{S}_{1,\gamma}^{*a}; \quad \gamma = 1(1)n. \quad (2)$$

Die Maeckerschen Zahlen Mk_c und Mk_γ treten also an die
 Stelle der Maeckerschen Zahl Mk beim einfachen Modell;
 sie sind unten definiert. Für die z-Komponente der Im-
 pulsbilanz erhalten wir dann ähnlich wie in Kap. 4.3.4.3.
 die Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_3 \hat{w}_{1,\gamma}^{*a} = -C_7 \cdot I_1(\rho) - C_8 \cdot K_1(\rho); \quad \gamma = 1(1)n. \quad (3)$$

Die Lösungen sind

$$\hat{w}_{1,\nu}^{*a} = -C_7 \frac{s}{2} I_1'(s) - C_8 \frac{s}{2} K_1'(s) + C_{9,\nu} I_1(s) + C_{10,\nu} K_1(s) ; \quad \nu = 1(1)n. \quad (4)$$

Die Integrationskonstanten $C_{9,\nu}$ und $C_{10,\nu}$ treten nun in der Tat n-fach auf; dies liegt an der Kopplung mit der Energiegleichung und der Unstetigkeit der $\hat{\epsilon}_\nu$ an den Bereichsgrenzen.

Im folgenden wird nun die Energiegleichung behandelt.

4.5.3. Mehrbereichslösungen der Leistungsbilanz

Für die Lösung der Energiegleichung definieren wir die neuen Maeckerschen Zahlen

$$\begin{aligned} Mk_x &:= \alpha_0 / \mu_0 I_B^2 / (\gamma L) \\ &= \alpha_0 / \mu_0 j_0^2 \pi^2 s_x^4 / (\gamma L k^4) \end{aligned} \quad (1)$$

für den Innenbereich und

$$Mk_\nu := \alpha_\nu / \mu_0 I_B^2 / (\gamma L) ; \quad \nu = 1(1)n \quad (2)$$

für die Außenbereiche.

Außerdem definieren wir anstelle der alten Zeitkonstanten τ für das Verhältnis von Energieinhalt und zugeführter Leistung des Bogens (s. Kap. 4.3.5.2.) die neuen Zeitkonstanten

$$\tau_c := \alpha_c \pi s_c^2 / (L h^2) \quad (3)$$

für den Innenbereich und

$$\tau_v := \alpha_v \pi s_c^2 / (L h^2); \quad v=1(1)n \quad (4)$$

für die Außenbereiche.

Für die Berechnung dieser Größen vgl. oben Gl. 4.5.1. (5) und die Angaben zur Berechnung der Maeckerschen Zahlen im Anhang.

Die Energiegleichungen für den Innen- und für die Außenbereiche erhalten wir durch ein ähnliches Vorgehen wie in Kap. 4.3.5. in einer lösbaren Form, wobei wir hier aber die Näherungen 4.5.1. (4) und 4.5.1. (10, 11) für das Mehrbereichsmodell an den entsprechenden Stellen einbauen.

Für den Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_0$ erhalten wir dann anstelle von Gl. 4.3.5.2. (1) die Leistungsbilanz

$$\mathcal{D}_S \hat{S}_1^i = \frac{\alpha_c}{h^2} \left(\frac{1}{s_0 + s_a} \frac{ds_0}{d\tau} \right)^i \cdot (\hat{v}_{1\tau}^i - \hat{\varepsilon}_0^0) - \frac{(\hat{\vec{f}} \cdot \hat{\vec{E}})_1}{h^2} \quad (5)$$

und für die Außenbereiche die Leistungsbilanzen

$$\mathcal{D}_S \hat{S}_1^a = \frac{\alpha_v}{h^2} \left(\frac{1}{s_0 + s_a} \frac{ds_0}{d\tau} \right)^a \cdot (\hat{v}_{1\tau,v}^a - \hat{\varepsilon}_v^0); \quad v=1(1)n. \quad (6)$$

In $\hat{v}_{1\tau}^i$ und $\hat{v}_{1\tau,v}^a$ sind dann noch über $\hat{w}_1^i$ und $\hat{w}_{1,v}^a$ die Größen

$$\frac{\pi^2 s_c^3}{M k_c} \frac{d}{ds} \hat{S}_1^{xi} \quad \text{und} \quad \frac{\pi^2 s_c^3}{M k_v} \frac{d}{ds} \hat{S}_{1,v}^{xa}$$

enthalten, so daß sich für $\hat{S}_1^{*1}$ und $\hat{S}_{1,\nu}^{*a}$ ähnliche Gleichungen wie in Kap. 4.3.5.2. (Gleichn. (4) und (5); $S=S^*L$) ergeben, deren Aufschreiben wir uns hier aber ersparen wollen. Die Lösungsmethode entspricht wiederum weitgehend der von Abschnitt 4.3.5.2., so daß wir auch weitgehend ähnliche Lösungen erhalten, die wir nicht bis ins Detail anzugeben brauchen.

Im Innenbereich $0 \leq |s| \leq s_0$ gilt jetzt (Index M bedeutet "Mehrbereichs-")

$$\begin{aligned} \hat{S}_1^{*1}(s) = & \sum_{\mu=1}^4 C_{\mu} \cdot F_{M\mu}(s) + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{1}{Mk_c} \cdot F_{M5}(s) + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot F_{M6}(s) + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot FM \cdot F_{M7}(s) + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{\tau_0}{Mk_0} \cdot F_{M8}(s) \end{aligned} \quad (7)$$

wobei die Lösungsfunktionen $F_{M\mu}$, $\mu=1(1)8$, aus den alten Lösungsfunktionen F_{μ} , $\mu=1(1)8$, durch die Multiplikation mit Mk_c/Mk hervorgehen:

$$F_{M\mu}(s) = \frac{Mk_c}{Mk} \cdot F_{\mu}(s); \mu=1(1)8 \quad (8)$$

Für die Außenbereiche $s_{\nu-1} \leq |s| \leq s_{\nu}$, $\nu=1(1)n$, modifizieren wir lediglich eine Lösungsfunktion geringfügig (s. u.), während die anderen ebenfalls durch einfache Multiplikation, allerdings mit Mk_{ν}/Mk , aus den alten Lösungsfunktionen hervorgehen. Die Lösungen sehen nun aber wegen des n-fachen Auftretens der Integrationskonstanten

$$C_{5,\nu}; C_{6,\nu}; C_{9,\nu}; C_{10,\nu}$$

etwas anders aus:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1,\nu}^{*a} = & C_{5,\nu} \cdot G_{M1,\nu} + C_{6,\nu} \cdot G_{M2,\nu} + C_7 \cdot G_{M3,\nu} + \\ & + C_8 \cdot G_{M4,\nu} + C_{9,\nu} \cdot G_{M5,\nu} + C_{10,\nu} \cdot G_{M6,\nu} + \\ & + C_{11} \cdot G_{M7,\nu} + C_{12} \cdot G_{M8,\nu} + \frac{\hat{E}_\nu \cdot \tau_\nu}{\tau_0 \cdot M k_\nu} \cdot G_{M9,\nu}; \\ & \nu = 1(1)n \end{aligned} \quad (9)$$

(anstelle von $\hat{E}_n$ ist wegen Gl. 4.5.1. (11) $\hat{E}_{n-1}$ zu verwenden).

Für die Lösungsfunktionen $G_{M\mu}$ gilt:

$$G_{M\mu}(s) = \frac{M k_\nu}{M k} \cdot G_\mu(s); \quad \mu = 1(1)8 \quad (10)$$

$\nu = 1(1)n$

und

$$G_{M9,\nu}(s) = \frac{M k_\nu}{\pi s_c} \cdot \frac{x_A}{4} \cdot \left(g_2(s) \int_{s_{\nu-1}}^s \frac{g_1(s')}{f(s')} ds' - g_1(s) \int_{s_{\nu-1}}^s \frac{g_2(s')}{f(s')} ds' \right) \quad (11)$$

für $f(s) := \left(\ln \frac{s_w}{s} + b \right)^2; \quad \nu = 1(1)n$

Die Integrationsgrenzen werden in dem Ausdruck für $G_{M9,\nu}$ so gelegt, daß

$$G_{M9,\nu}(s_{\nu-1}) = 0; \quad \nu = 1(1)n \quad (12)$$

Damit läßt sich bei der Aufstellung des Gleichungssystems für die $8 + 4n$ Integrationskonstanten der Schreibaufwand erheblich vermindern. Daß diese Wahl der Integrationskonstanten möglich ist, beruht darauf, daß $g_1(s)$ und $g_2(s)$ (s. Anhang) die beiden linear unabhängigen Lösungen der verkürzten Differentialgleichung

$$D_B \hat{S}_{1,\gamma}^{*a} + \frac{1}{s(\ln \frac{s_w}{s} + b)} \cdot \frac{d}{ds} \hat{S}_{1,\gamma}^{*a} = 0$$

sind, eine Veränderung der Integrationsgrenzen also nur eine andere Festlegung für die Integrationskonstanten $C_{s,\gamma}$ und $C_{s,\gamma}$ bedeutet.

Wir gehen nun zur Aufstellung des Gleichungssystems für die Integrationskonstanten mit Hilfe der Randbedingungen über; dieses Gleichungssystem, welches gleichzeitig ein lineares Differentialgleichungssystem für die ε_γ , $\gamma=0(1)n-1$, liefern wird, unterscheidet sich wegen der zusätzlichen $5x (n-1)$ Randbedingungen für die neuen Außenbereichsgrenzen erheblich von dem bisherigen Gleichungssystem 4.3.6. (1)-(13).

4.5.4. Randbedingungen beim Mehrbereichsmodell

Die neuen Lösungen unseres Differentialgleichungssystems müssen nun zusätzlich zu den bisherigen 13 Randbedingungen (Kap. 4.3.6.) noch weitere $5x (n-1)$ Randbedingungen an den Außenbereichsgrenzen bei $s_\gamma + \delta_\gamma$ erfüllen, entsprechend der Zahl von $4x (n-1)$ zusätzlichen Integrationskonstanten und $n-1$ zusätzlichen ε_γ -Werten. Diese Randbedingungen folgen aus ähnlichen Überlegungen wie in Kap. 4.3.6. Wir erhalten damit das folgende Gleichungssystem:

(1) Verschwinden des Wärmestrompotentials an der Wand:

$$\hat{S}_{1,n}^{*a}(s_n) = 0 \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist nun die Geschwindigkeit ε_{n-1}^0 (s. o.) enthalten.

(2) Verschwinden der Gasströmung auf der Gefäßwand:

$$(3) \quad (4) \quad \hat{w}_{1,n}^{*a}(s_n) + \frac{d}{ds} \left(\hat{w}_{1,n}^{*a} + \frac{\pi^2 s_c^3}{MK_n} \cdot \hat{S}_{1,n}^{*a} \right) \Big|_{s=s_n} = 0 \quad (2)$$

In dieser Gleichung ist wieder die Geschwindigkeit ε_{n-1}^0 enthalten.

$$\hat{w}_{1,n}^{*a}(s_n) = 0 \quad (3)$$

$$\hat{w}_{1,n}^{*a}(s_n) = 0 \quad (4)$$

(5) Stetigkeit von p an den Bereichsgrenzen bei

$$s_v + \delta_v, \nu = 0(1)n-1:$$

Bezüglich der Kanaloberfläche gilt weiterhin die Gl. 4.3.6. (5). Die Stetigkeit an den anderen Grenzen haben wir bereits oben für die Berechnung von q_1^a benutzt.

(6) Stetigkeit der Gasströmung an den Bereichsgrenzen bei

$$(7) \quad s_v + \delta_v, \nu = 0(1)n-1:$$

(8)

Bezüglich der Kanaloberfläche gelten weiterhin die Gleichungen 4.3.6. (6) und 4.3.6. (7); anstelle von Gl. 4.3.6. (8) erhalten wir jetzt aber

$$\hat{w}_{1,1}^{*a}(s_0) + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{\pi s_c^3}{2 M k_c} - \left(\hat{w}_{1,1}^{*a}(s_0) + \frac{\pi^2 s_c^3}{M k_1} \cdot \hat{w}_{1,1}^{*a}(s_0) \right) = 0 \quad (8)_0$$

Die Stetigkeit von $v_{1,n}^a$ und $v_{1,\nu}^a$ an den anderen Grenzflächen haben wir bereits oben für die Berechnung von q_1^a und $\hat{w}_{1,1}^a$ benutzt. Aus der Stetigkeitsforderung für $v_{1,2}^a$ bei $s = s_v + \delta_v, \nu = 1(1)n-1$, folgen jedoch zusätzliche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \hat{w}_{1,\nu}^{*a}(s) + \frac{\pi^2 s_c^3}{M k_y} \cdot \hat{w}_{1,\nu}^{*a}(s_y) - \hat{w}_{1,\nu+1}^{*a}(s_y) + \\ - \frac{\pi^2 s_c^3}{M k_{y+1}} \cdot \hat{w}_{1,\nu+1}^{*a}(s_y) = 0; \end{aligned} \quad (8)_y$$

$\nu = 1(1)n-1$

In diesen $n-1$ Gleichungen sind die Geschwindigkeiten $\vec{E}_\gamma$ enthalten.

- (9) Stetigkeit der ersten Ableitungen der Tangentialkomponenten), abgeleitet senkrecht zu den Grenzflächen bei $s_\gamma + \delta_\gamma$, $\gamma = 0(1)n-1$:

Bezüglich der Kanaloberfläche gilt weiterhin die Gleichung 4.3.6. (9); aus der Stetigkeit von $d\vec{v}_{12}/ds$ erhalten wir jedoch die Gleichungen

a) bei $s = s_0 + \delta_0$:

$$\left. \frac{d\hat{w}_{1,1}^{*i}}{ds} \right|_{s=s_0} + \frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_0} \cdot \left. \frac{d\hat{s}_{1,1}^{*i}}{ds} \right|_{s=s_0} - \left. \frac{d\hat{w}_{1,1}^{*\alpha}}{ds} \right|_{s=s_0} - \frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_1} \cdot \left. \frac{d\hat{s}_{1,1}^{*\alpha}}{ds} \right|_{s=s_0} = 0 \quad (10)_0$$

worin $\vec{E}_0$ enthalten ist, und

b) bei $s = s_\gamma + \delta_\gamma$, $\gamma = 1(1)n-1$:

$$\left. \frac{d\hat{w}_{1,\gamma}^{*\alpha}}{ds} \right|_{s=s_\gamma} + \frac{\pi^2 s_\gamma^3}{Mk_\gamma} \cdot \left. \frac{d\hat{s}_{1,\gamma}^{*\alpha}}{ds} \right|_{s=s_\gamma} - \left. \frac{d\hat{w}_{1,\gamma+1}^{*\alpha}}{ds} \right|_{s=s_\gamma} - \frac{\pi^2 s_\gamma^3}{Mk_{\gamma+1}} \cdot \left. \frac{d\hat{s}_{1,\gamma+1}^{*\alpha}}{ds} \right|_{s=s_\gamma} = 0; \quad (10)_\gamma$$

$\gamma = 1(1)n-1$

In diesen $n-1$ Gleichungen sind die Geschwindigkeiten $\vec{E}_\gamma$ enthalten.

Die Stetigkeit von dr_{1v}/ds an den Außenbereichsgrenzen haben wir bereits oben für die Berechnung von q_1^a und $\bar{\omega}_1^a$ benutzt.

(11) Stetigkeit des Wärmestrompotentials an den Bereichsgrenzen bei $s_v + \delta_v$, $v = 0(1)n-1$:

a) bezüglich der Kanaloberfläche gilt nun, wenn man die Bedingung (13), s. u., noch einbaut:

$$\frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_0} \cdot \hat{S}_{1,1}^{*a}(s_0) - \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{\pi s_0^3}{2 Mk_0} = 0 \quad (11)_0$$

In dieser Gleichung stehen nun in den Termen, die von s_1 herrühren, die Faktoren Mk_1/Mk_0 .

b) Bezüglich der Außenbereichsgrenzen bei

$s_v + \delta_v$, $v = 1(1)n-1$, gelten die folgenden Gleichungen, bei den noch die Gl. (13)_v (s. u.) berücksichtigt sind:

$$\frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_0} \cdot \hat{S}_{1,v+1}^{*a}(s_v) - \frac{\varepsilon_v}{\tau_v} \cdot \frac{\pi s_0^3}{2 Mk_0} = 0; \quad (11)_v$$

$v = 1(1)n-1$

S_1 liefert hier die Faktoren Mk_{v+1}/Mk_0 ; außerdem muß das Auftreten von ε_v/τ_v beachtet werden.

(12) Stetigkeit des Wärmestroms senkrecht zu den Grenzflächen bei $s_v + \delta_v$, $v = 0(1)n-1$ (Aus der Stetigkeit von $\text{div } \vec{v}$ ergibt sich mit den Leistungsbilanzen $\alpha_v \text{div } \vec{v}_{1,v}^a = \text{div grad } S_{1,v}^a$ im Außenbereich, daß die Divergenz des Wärmestroms an den Grenzen lediglich einen Sprung macht. Der Wärmestrom selbst muß also stetig sein.):

- a) für die Kanaloberfläche bei $s_0 + \delta_0$ erhalten wir unter Verwendung von Bedingung (10)₀ die Gleichung

$$\left(\frac{d\hat{w}_1^{*i}}{ds} - \frac{d\hat{w}_{1,1}^{*q}}{ds} \right)_{s=s_0} + \left(\frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_0} - \frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_1} \right) \cdot \frac{d\hat{s}_{1,1}^{*q}}{ds} \Big|_{s=s_0} + \frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_0} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} = 0 \quad (12)_0$$

Die Gleichung haben wir in dieser Form geschrieben, um das Auftreten eines Gliedes mit ε_0 zu vermeiden; ε_1 tritt hier wegen der Modifikation 4.5.3. (11) der Lösungsfunktion G_g nicht auf. In Gl. (12)₀ sind Faktoren Mk_1/Mk_0 enthalten.

- b) an den Außenbereichsgrenzen gilt bei Verwendung der Bedingungen (10)_y:

$$\left(\frac{d\hat{w}_{1,y}^{*a}}{ds} - \frac{d\hat{w}_{1,y+1}^{*a}}{ds} \right)_{s=s_y} + \left(\frac{\pi^2 s_y^3}{Mk_y} - \frac{\pi^2 s_y^3}{Mk_{y+1}} \right) \cdot \frac{d\hat{s}_{1,y+1}^{*a}}{ds} \Big|_{s=s_y} = 0 \quad (12)_y$$

$y = 1(1)n-1$

Durch die Verwendung von (10)_y ließ sich hier das Auftreten von ε_y vermeiden. Die n-1 Gleichungen enthalten Faktoren Mk_y/Mk_c und Mk_{y+1}/Mk_c .

- (13) "Konsistenzbedingungen": auf den sich bewegenden Isothermen bei $s_y + \delta_y$, $y = 0(1)n-1$, bleiben die Wärmestrompotentialwerte $S_0(s_y) = S(s_y + \delta_y)$ erhalten.

- a) Für die Kanaloberfläche bei $s_0 + \delta_0$ erhalten wir dann

$$\frac{\pi^2 s_0^3}{Mk_0} \cdot \hat{s}_1^{*i}(s_0) - \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{\pi s_0^3}{Mk_0} = 0 \quad (13)_0$$

In dieser Gleichung ist ein Term mit ε_0 enthalten.

b) Für die Außenbereichsgrenzen erhalten wir:

$$\frac{\pi^2 p_0^3}{Mk_0} \cdot \int_{1,v}^{1*9} (p_v) - \frac{\varepsilon_v}{\tau_v} \cdot \frac{\pi p_0^3}{2 Mk_0} = 0 ; \quad (13)_v$$

$$v = 1(1)n-1$$

S_A liefert hier Faktoren Mk_v/Mk_e ; außerdem muß das Auftreten von $\dot{\varepsilon}_v$ und der ε_v/τ_v -Glieder beachtet werden.

Damit ist nun das Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der $8 + 4n$ Integrationskonstanten $C_1, C_2, C_3, C_4, C_{5,v}, C_{6,v}, C_7, C_8, C_{9,v}, C_{10,v}, C_{11}, C_{12}$ ($v=1(1)n$) und der n ε_v -Funktionen vollständig. Es besteht aus $13+5(n-1) = 8+5n$ linear unabhängigen Gleichungen. Um die Lösung hinsichtlich der Bestimmung der $\varepsilon_v(t)$ -Funktionen, die uns allein interessieren, zu vereinfachen, sorgen wir noch durch Elimination dafür, daß 1.) keine Gleichung $\dot{\varepsilon}_v$ - und $\dot{\varepsilon}_\mu$ -Terme mit $v \neq \mu$ gleichzeitig enthält und 2.) für jedes ε_v nur eine einzige Gleichung übrig bleibt, die $\dot{\varepsilon}_v$ enthält.

Dazu kombinieren wir Gl. (1) mit Gl. (8) $_{n-1}$, Gl. (2) mit Gl. (10) $_{n-1}$, Gl. (10) $_0$ mit Gl. (13) $_0$, Gl. (10) $_v$ mit Gl. (8) $_v$ und die Gleichungen (14) $_v$ mit den Gleichungen (8) $_v$. Dann enthält nur noch die Gl. (13) $_0$ einen Ausdruck mit $\dot{\varepsilon}_0$ und die $\dot{\varepsilon}_v$ treten nur noch in den Gleichungen (8) $_v$, $v=1(1)n-1$, auf.

Damit können wir die $8 + 4n$ Gleichungen, die keine Terme mit $\dot{\varepsilon}_v$ enthalten, schreiben als

$$D \vec{C}_M = \vec{Y} \quad (14)$$

wobei D die $(8+4n) \times (8+4n)$ -Koeffizienten-Matrix für die Vektoren

$$\vec{C}_M := \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{12} \end{pmatrix} \quad (15)$$

ist, die aus den $8 + 4n$ Integrationskonstanten (s. o.) gebildet werden. Der inhomogene Teil $\vec{Y}$ enthält die Glieder mit ε_0 bis ε_{n-1} . Wir können nun ein Differentialgleichungssystem für das Zeitverhalten $\vec{\varepsilon}(t)$ der Bogenauslenkung herleiten.

4.5.5. Differentialgleichungssystem für das Zeitverhalten der Bogenauslenkung

Die Lösungen $\vec{C}_M$ von Gl. 4.5.4. (14) müssen ebenfalls den n linear unabhängigen $\vec{\varepsilon}$ -Gleichungen 4.5.4. (13)₀ und 4.5.4. (8)_v $v = 1(1)n-1$, genügen. Damit diese Bedingung erfüllt ist, müssen sämtliche n charakteristischen Determinanten, die sich durch Rändern von D mit $\vec{Y}$ und den jeweiligen Koeffizienten und inhomogenen Gliedern der n $\vec{\varepsilon}$ -Gleichungen aufstellen lassen gleich Null sein /21/.

Es gilt also

$$\det(D_v) = 0; \quad v = 0(1)n-1 \quad (1)$$

wobei D_v durch

$$D_v := \left(\begin{array}{ccc|c} D_{1,1} & \cdots & D_{1,8+4n} & Y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{8+4n,1} & \cdots & D_{8+4n,8+4n} & Y_{8+4n} \\ \hline X_{v,1} & \cdots & X_{v,8+4n} & y_v \end{array} \right); \quad v = 0(1)n-1 \quad (2)$$

gegeben ist. Die $X_{r,\mu}$ sind die Koeffizienten der C_μ aus den Gleichungen 4.5.4. (13)₀ bzw. 4.5.4. (8)_v und die y_v sind die inhomogenen Teile dieser Gleichungen, die Ausdrücke mit ε_0 bis ε_{n-1} und jeweils einem $\vec{E}_v$ enthalten.

Die letzte Spalte der Matrizen D_v , der Spaltenvektor $\vec{D}_v^{g+4n}$, hat die Form

$$\begin{aligned} \vec{D}_v^{g+4n} := & \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \vec{d}_v^1 + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot FM \cdot \vec{d}_v^2 + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{1}{MK_c} \cdot \vec{d}_v^3 + \\ & + \frac{1}{MK_c} \cdot \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\mu}{\tau_\mu} \cdot \vec{d}_v^{3+\mu} + \varepsilon_v \cdot \frac{\tau_c \pi s_0^2}{\tau_0 MK_c} \cdot \vec{d}_v^{3+n} \quad (3) \\ & \gamma = 0(1)n-1 \end{aligned}$$

Für den letzten Term wurde von der Beziehung

$$\frac{\tau_v}{MK_v} = \frac{\tau_c}{MK_c} \quad ; \quad \gamma = 0(1)n-1 \quad (4)$$

Gebrauch gemacht.

Wir können die Determinanten $\det(D_v)$ nach der letzten Spalte entwickeln, so daß wir aus Gl. (1) mit den Unterdeterminanten

$$\begin{aligned} \Delta_{r,\mu} := & \det(\vec{D}_r^1 | \dots | \vec{D}_r^{g+4n} | \vec{d}_r^\mu), \quad (5) \\ & \gamma = 0(1)n-1 \\ & \mu = 1(1)3+n \end{aligned}$$

das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \Delta_{r,1} + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot FM \cdot \Delta_{r,2} + \frac{\varepsilon_0}{\tau_0} \cdot \frac{1}{MK_c} \cdot \Delta_{r,3} + \\ & + \frac{1}{MK_c} \cdot \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_\gamma}{\tau_\gamma} \cdot \Delta_{r,3+\gamma} + \varepsilon_r \cdot \frac{\tau_0 \pi s_0^2}{\tau_0 MK_c} \cdot \Delta_{r,3+n}, \quad (6) \\ & \gamma = 0(1)n-1 \end{aligned}$$

für die $\vec{E}_\gamma$ erhalten. Dieses System bringen wir in die Form

$$\vec{E}_\gamma = \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu \cdot H_{\gamma,\nu} \quad ; \quad \gamma = 0(1)n-1 \quad (7)$$

oder

$$\vec{\dot{E}}(t) = H \cdot \vec{E}(t) \quad (8)$$

mit der Matrix

$$H := \begin{pmatrix} H_{0,0} & \cdots & H_{0,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n-1,0} & \cdots & H_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

deren Elemente durch

$$H_{\gamma,0} := \frac{-Mk_c \cdot (\Delta_{\gamma,1} + FM \cdot \Delta_{\gamma,2}) - \Delta_{\gamma,3}}{\tau_c \pi g_c^2 \Delta_{\gamma,3+n}} \quad ; \quad \gamma = 0(1)n-1 \quad (10)$$

und

$$H_{\gamma,\nu} := \frac{\tau_c}{\tau_\nu} \cdot \frac{-\Delta_{\gamma,3+\nu}}{\tau_c \pi g_c^2 \Delta_{\gamma,3+n}} \quad ; \quad \begin{matrix} \nu = 1(1)n-1 \\ \gamma = 0(1)n-1 \end{matrix} \quad (11)$$

gegeben sind.

Wir untersuchen hier nur den Einfluß eines zeitkonstanten axialen Fremdmagnetfeldes auf das Anwachsen der Bogeninstabilität, setzen also $\partial FM / \partial t = 0$. Die Lösungen des dann autonomen Systems (8) lassen sich nun durch Entwicklung nach den Eigenvektoren $\vec{v}^\nu$, $\nu = 0(1)n-1$, gewinnen [22]. Die Lösungen sind:

$$\vec{\varepsilon}(t) = \varepsilon_{00} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} e^{\Omega_{\nu} t} \vec{v}^{\nu} \quad (12)$$

Dabei sind die a_{ν} die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\vec{\varepsilon}(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{00} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{00} \cdot V \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \varepsilon_{00} V \vec{a} \quad (13)$$

mit der Eigenvektor-Matrix $V := (\vec{v}^0 | \dots | \vec{v}^{n-1})$. Die Anwachsraten Ω_{ν} sind die Eigenwerte der Matrix H zu den Eigenvektoren $\vec{v}^{\nu}$. Die Eigenwerte und Eigenvektoren können komplexwertig sein: $\Omega_{\nu} \in \mathbb{C}$, $\vec{v}^{\nu} \in \mathbb{C}^n$. Die Rechnungen zeigen aber, daß nur wenige komplexe Wurzeln vorkommen, wobei diese dann paarweise konjugiert komplex auftreten. Da die Realteile dieser Ω_{ν} dann jeweils sehr große negative Werte haben, handelt es sich bei diesen Lösungen um sehr schnell abklingende Schwingungen, die uns im folgenden nicht weiter interessieren.

4.5.6. Ergebnisse der Mehrbereichsmodell-Theorie

Ähnlich wie bei der Theorie für das einfache Bogenmodell können wir nun auch die Stabilitätsgrenzen und Anwachsraten für das Mehrbereichsmodell berechnen, allerdings mit einem wesentlich höheren Rechen- und Zeitaufwand. Wir beschränken unsere Untersuchung deshalb hier auf die Bogenstromstärken 9,0 A diesseits und 10,0 A jenseits der experimentell beobachteten Grenzstromstärke von 9,35 A.

Für die Rechnungen wurde ein Fortran-Programm entwickelt, mit dem insbesondere die ca. $(8 + 4n) \cdot (9 + 4n)$ Koeffizienten des Gleichungssystems 4.5.4. (14), die ca. $n \cdot (9 + 4n)$ Koeffizienten der $\vec{\varepsilon}$ -Gleichungen, die $n \cdot (3 + n)$ Determinanten $\Delta_{\gamma, \mu}$, die n^2 Elemente der Matrix H, die jeweils n Eigenwerte und Eigenvektoren Ω_{ν} bzw. $\vec{v}^{\nu}$ und die n Lösungen a_{ν} der Anfangs-

bedingung berechnet werden. Für die Stabilitätsgrenzen-Bestimmung müssen drei weitere $(8+5n) \times (8+5n)$ -Determinanten berechnet werden.

Die Besselfunktions- und die Integralwerte an den Stellen S_v , die Determinanten und die Lösungen des Eigenwert- und des Anfangswertproblems werden mit Hilfe von geeigneten Unterprogrammen aus der NAG Fortran Library /23/ des Rechenzentrums der Universität berechnet. Diese Rechnungen müssen für jeden einzelnen Wert der normierten Ganghöhe $\lambda/2\pi R$ wiederholt werden. Für jeden solchen Punkt benötigte die CDC Cyber 175 - Rechananlage eine CPU-Rechenzeit von ca. 15 sec für $n = 8$ (n = Anzahl der Außenbereiche des Bogenmodells), von ca. 90 sec für $n = 16$ und von ca. 400 sec für $n = 24$. Mit noch feinerer Aufteilung des Bogenquerschnitts wurde deshalb nicht mehr gerechnet; außerdem mußte bei $n = 24$ auf die Stabilitätsgrenzen (Mk_G , FM_G)-Berechnung verzichtet werden, um die Speicherberechtigung von ca. 50 000 Worten nicht zu überschreiten.

Die Rechnungen in diesem Rahmen lassen jedoch trotz der genannten Einschränkungen einige interessante Schlüsse auf den Wert und die Grenzen des einfacheren Bogenmodells zu.

4.5.6.1. Stabilitätsgrenzen

Beim Mehrbereichsmodell lassen sich ebenso wie beim einfachen Modell marginale Werte für die Maeckersche Zahl des Bogens, hier für Mk_G , und für das axiale Fremdmagnetfeld berechnen, bei deren Überschreiten der Bogen instabil wird. An der Stabilitätsgrenze

$$\Omega_v = 0 \quad \forall v \quad (1)$$

gilt

$$\dot{E}_v = 0 \quad \forall v. \quad (2)$$

Für das Gleichungssystem der Randbedingungen 4.5.4. (1) bis (13)_v, welches wir dann in der Form

$$M_M \vec{C}_{ME} = \vec{0} \quad (3)$$

schreiben können, wobei

$$\vec{C}_{ME} := \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{12} \\ \varepsilon_0 / \tau_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} / \tau_0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

muß nun

$$\det(M_M) = 0 \quad (5)$$

gelten, damit Gl. (3) eine nicht-triviale Lösung $\vec{C}_{ME} \neq 0$ hat.

M_M ist eine $(8 + 5n) \times (8 + 5n)$ -Matrix vom Rang $8 + 5n$, deren letzte n Spaltenvektoren $\vec{f}^\mu$, $\mu = 9 + 4n(1)8 + 5n$, wir als

$$\vec{f}^{9+4n} = \vec{g}^1 + FM \cdot \vec{g}^2 + \frac{1}{Mk_c} \cdot \vec{g}^3 \quad (6)$$

und

$$\vec{f}^{9+4n+v} = \frac{1}{Mk_c} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_v} \cdot \vec{g}^{3+v}, \quad v = 1(1)n-1 \quad (7)$$

darstellen können (die $\vec{f}^\mu$ setzen sich aus den Koeffizienten

der ϵ_y/τ_0 zusammen). Durch Entwicklung der Determinanten von M_M erhalten wir dann aus Gl. (5) mit der Abkürzung

$$M' := (\vec{M}_M^1 | \dots | \vec{M}_M^{p+4n}) \quad (8)$$

die Beziehung

$$\det(M' | \vec{g}^1 + FM \cdot \vec{g}^2 + \frac{1}{Mk_c} \cdot \vec{g}^3 | \frac{1}{Mk_c} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_1} \cdot \vec{g}^4 | \dots | \frac{1}{Mk_c} \cdot \frac{\tau_0}{\tau_{n-1}} \cdot \vec{g}^{2+n}) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\det(M' | \vec{g}^1 + FM \cdot \vec{g}^2 + \frac{1}{Mk_c} \cdot \vec{g}^3 | \vec{g}^4 | \dots | \vec{g}^{2+n}) = 0 \quad (9)$$

Mit

$$\beta_1 := \det(M' | \vec{g}^1 | \vec{g}^4 | \dots | \vec{g}^{2+n})$$

$$\beta_2 := \det(M' | \vec{g}^2 | \vec{g}^4 | \dots | \vec{g}^{2+n})$$

und

$$\beta_3 := \det(M' | \vec{g}^3 | \vec{g}^4 | \dots | \vec{g}^{2+n})$$

gilt dann an der Stabilitätsgrenze:

$$\beta_1 + FM \cdot \beta_2 + \frac{1}{Mk_c} \cdot \beta_3 = 0 \quad (10)$$

Diese Gleichung gilt wiederum auch für einen Linksschraubensinn der Bogenhelix, wenn wir FM noch mit einem Faktor $\text{sgn}(\epsilon_c)$ versehen (vgl. Kap. 4.4.1.1.). Für die Rechtsschraubenhelix folgt für

- a) den marginalen Wert Mk_G für die Maeckersche Zahl Mk_c des stromführenden Bogeninneren:

$$Mk_G = \frac{-\beta_3 / \beta_1}{1 + FM \cdot \beta_2 / \beta_1} \quad (11)$$

b) den marginalen Wert FM_G für den Fremdmagnetfeld-Faktor FM:

$$FM_G = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \left(\frac{Mk_{G0}}{Mk_c} - 1 \right) \quad (12)$$

mit

$$Mk_{G0} := Mk_G (FM=0) = - \frac{\beta_3}{\beta_1} \quad (13)$$

In Abbildung 14 sind die marginalen Kurven für Mk_c bei einem Bogenstromwert von 9,0 A zu sehen: in Übereinstimmung mit dem Experiment ist der Bogen ohne Fremdmagnetfeld noch stabil, während er durch ein axiales Fremdmagnetfeld von 5 Gauß schon für einen weiten Ganghöhenbereich destabilisiert wird. Für $I_B = 10,0 \text{ A}$ liefert die Rechnung Instabilität bereits ohne Fremdmagnetfeld, ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Zahlenwerte für die marginalen Maeckerschen Zahlen Mk_G variieren schwach mit der Anzahl n der Grenzflächen und mit der Wahl ihrer Lage im Außenbereich. Abb. 14 zeigt die Verhältnisse für $n = 16$, wobei die Radien r_n bis r_{16} ausgehend von $r_0 = 0,8 \text{ mm}$ linear auf $r_{16} = R$ anwachsen. Durch Änderung der Lage (z. B. exponentielles Anwachsen) der Bereichsgrenzen oder ihrer Anzahl (bis herab zu $n = 2$) kann das Ergebnis für den kritischen Wert von Mk_c um bis zu 10% verändert werden. Den maximalen Wert für Mk_{cr} erhalten wir bei exponentiellem Anwachsen von r_n ; die Ursache dürfte darin liegen, daß dann neben dem ohnehin minimalen Mk_c -Wert im Bogenkern überwiegend die relativ kleinen Mk_n -Werte in der Nähe der Kanaloberfläche in die Rechnung eingehen. Mit wachsender Bereichsanzahl bei äquidistanter Teilung,

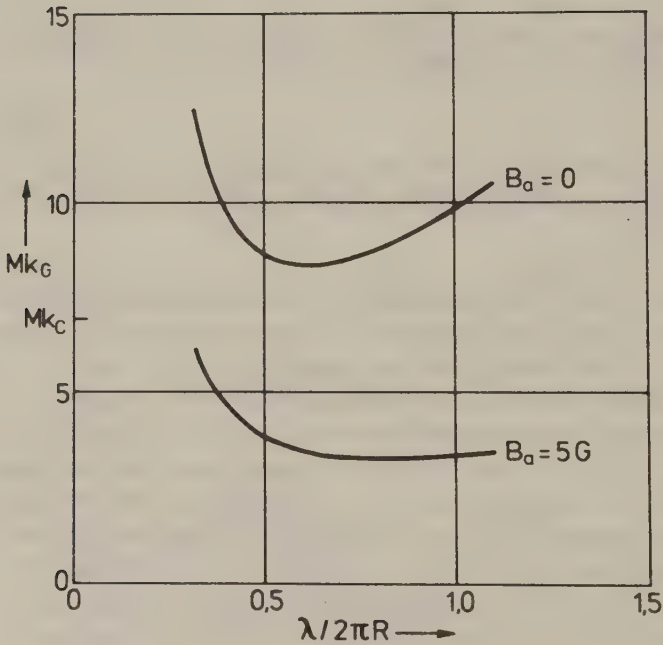


Abb. 14 Stabilitätsgrenzkurven für Mk_c

($n = 16$, τ_p äquidistant)

$R = 10 \text{ mm}$ $p = 1040 \text{ mbar}$

$I_B = 9,0 \text{ A}$ $B_{oc} = 22,3 \text{ G}$

also bei Annäherung an die wahre $(\partial h / \partial (1/s_H))_p$ -Verteilung, scheinen die marginalen Werte jedoch wie erwartet zu

konvergieren. Dies wird bei der Diskussion über die Anwachsraten noch deutlicher (s. u.).

Die Lage der Stabilitätsgrenzkurven für das axiale Fremdmagnetfeld ist ebenfalls abhängig von der Bereichswahl; dies zeigt Abb. 15. Mit zunehmender Bereichszahl erscheint

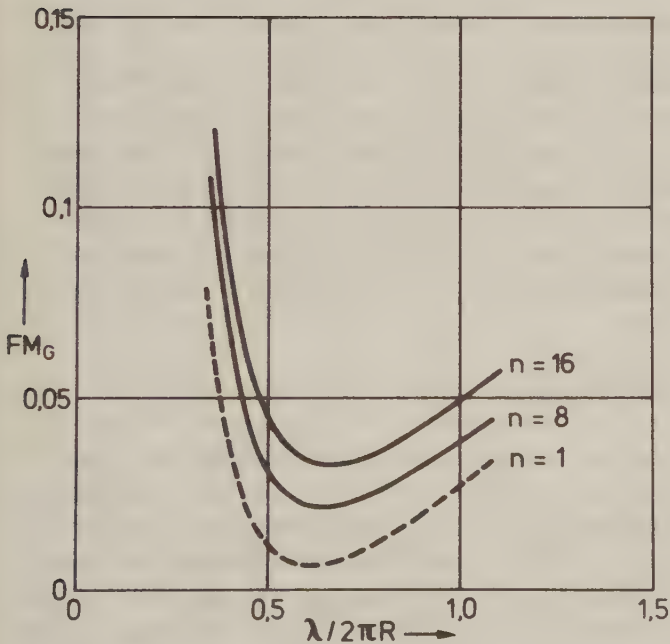


Abb. 15 Marginales Fremdmagnetfeld

— $n = 8$ u. 16 ; τ_v äquidistant

-- einfaches Bogenmodell ($n = 1$)

$R = 10 \text{ mm}$ $p = 1040 \text{ mbar}$

$I_B = 9,0 \text{ A}$ $B_{oc} = 22,3 \text{ G}$

der Bogen als immer stabiler. Um die Stabilitätsgrenze zu erreichen, muß man demnach ein etwas stärkeres Fremdmagnetfeld einsetzen als es die Rechnung mit dem einfachen Bogenmodell ($n = 1$ und gemeinsamer M_k -Mittelwert für Innen- und Außenbereich) voraussagt. In dieser Hinsicht stimmt das Mehrbereichsmodell noch besser mit dem Experiment überein als das einfache Modell; die kritischen Ganghöhenwerte, die schon beim einfachen Modell sehr gut mit den experimentellen Werten übereinstimmten (Abb.9b), passen jetzt ebenfalls noch besser.

Das Mehrbereichsmodell liefert also für die Stabilitätsgrenzen noch geringfügig bessere Ergebnisse als das einfache Bogenmodell; da an den Stabilitätsgrenzen $\dot{\vec{E}} = \vec{0}$ gilt, sehen wir hier allein den Einfluß der Annäherung an die wahre $(\partial H / \partial (1/s_n))_p$ -Verteilung. Die Berechnung der Anwachsrate zeigt nun, daß sich unsere theoretische Beschreibung der Entwicklung der Bogeninstabilität durch die bereichsweise Approximation der Zeitableitungen des Wärmestrompotentials (Gln. 4.5.1. (10, 11)) noch weiter verbessern läßt.

4.5.6.2. Anwachsrate

Die Berechnung der Eigenwerte Ω_ν , $\nu = 0(1)n-1$, der Matrix H (Gln. 4.5.5. (9)-(11)) zeigt, daß für jede Bogenstrom-, Fremdmagnetfeld- und Ganghöhen-abhängige $\vec{E}(t)$ -Lösung (Gl. 4.5.5. (12)) immer nur ein einziger positiver Wert Ω_μ auftritt, falls sich überhaupt Instabilität ergibt. Die anderen Ω_ν -Werte mit $\nu \neq \mu$ sind dann stark negativ und liegen betragsmäßig bei mindestens $10^3 s^{-1}$ oder noch weit darüber.

Die j -te Komponente von $\vec{E}(t)$ hat die Form

$$\varepsilon_j(t) = \varepsilon_{0j} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu (\vec{v}^\nu)_j e^{\Omega_\nu t} \quad (1)$$

Sie stellt die Auslenkung des j-ten isothermen Bereichsrandes mit dem Radius r_j dar. Die Anfangsbedingung 4.5.5. (13) liefert solche a_ν -Werte, daß die Faktoren $a_\nu (\vec{v}^\mu)_j$ sich nicht um mehr als 3 Zehnerpotenzen voneinander unterscheiden. Wegen der großen negativen Ω_ν -Werte für $\nu \neq \mu$ bei Instabilität gilt dann

$$\varepsilon_j(t) \approx \varepsilon_{00} \cdot a_\mu (\vec{v}^\mu)_j \cdot e^{\Omega_\mu t} \quad (2)$$

für

$$j = 0(1)n-1, \quad \Omega_\mu > 0.$$

Von ε_μ wissen wir $\varepsilon_\mu = 0$, weil die äußerste Isotherme durch die Lage der Gefäßwand fixiert ist. Abbildung 16 zeigt uns nun für einen Bogenstrom von 9,0 A und ein Fremdmagnetfeld-Wert $B_a = 5$ Gauß den für $n = 8$ berechneten Verlauf des Faktors $a_\mu (\vec{v}^\mu)_j$ über j für einen Wert $\lambda/2\pi R = 0,43$ der normierten Ganghöhe. Für diese Parameter ist $\Omega_\mu = 1178/S$; der Index μ der maximalen positiven Anwachsrate ist bei diesem Beispiel gleich 5.

Die Kurve zeigt den erwarteten Abfall zur Wand hin; die äußeren Isothermen bewegen sich entsprechend langsamer als die weiter innen liegenden.

Im folgenden soll der Index μ zur Bezeichnung der maximalen positiven Anwachsrate weggelassen werden:

$$\Omega := \text{Max} (\Omega_\nu \mid \nu = 0(1)n-1) \quad (3)$$

Bei Instabilität ist also $\Omega = \Omega_\mu > 0$. Abbildung 17 zeigt die Ergebnisse für diese Anwachsrate Ω bei unterschiedlichen theoretischen Voraussetzungen: die Maxima der Ω -Kurven scheinen bei äquidistanter Aufteilung des Außen-

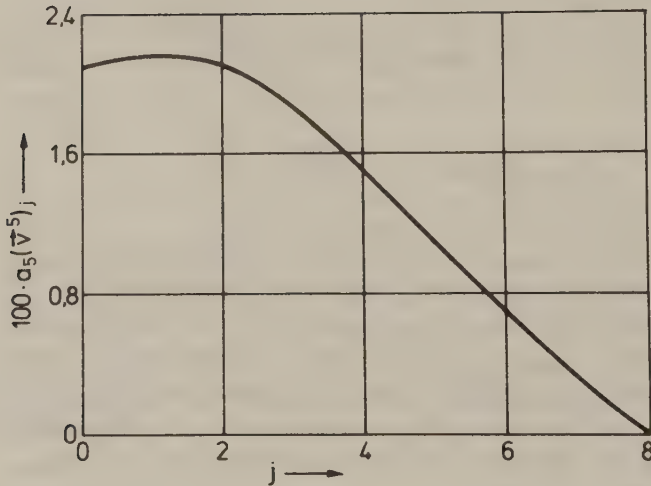


Abb. 16 Verlauf des Faktors $a_5(\vec{v}^5)_j$ von ϵ_j

$n = 8$, $\vec{v}$ linear anwachsend

$\lambda/2\pi R = 0,43$, $I_B = 9,0$ A , $B_a = 5,0$ G

bereichs mit wachsender Bereichsanzahl gegen den Meßpunkt zu konvergieren. Bei einem Bogenstromwert von 10,0 A ist die Anwachsrate Ω bereits im Fremdmagnetfeld-freien Fall

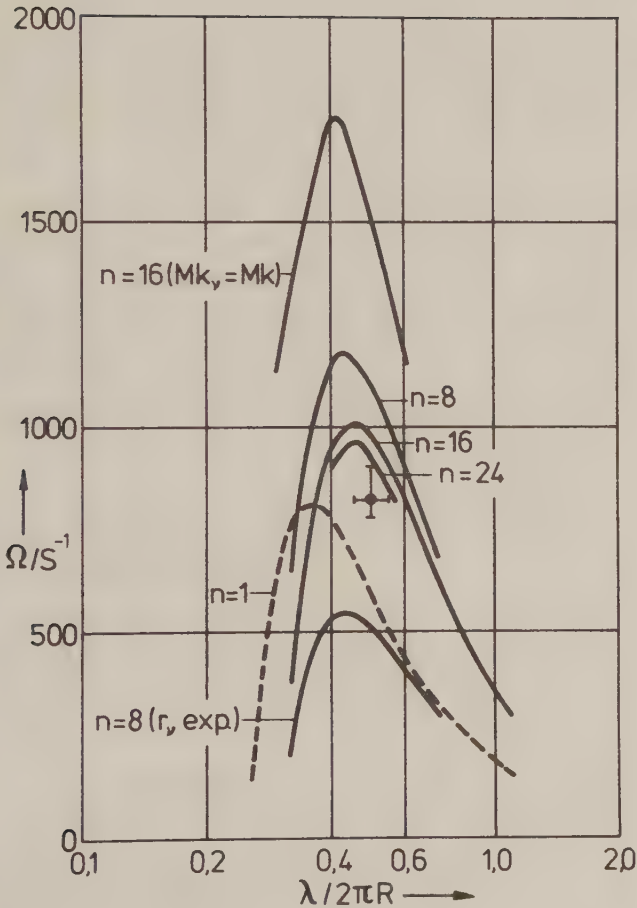


Abb. 17 Anwachsrate für Störungen der Ganghöhe λ

— — einfaches Bogenmodell ($n = 1$)

— $n = 8, 16$ u. 24 ; τ_y äquidistant

oben: $Mk_y = Mk = 20,89$ $\checkmark$; unten: τ_y exp. anw.

$R = 10$ mm, $p = 1040$ mbar, $I_B = 9,0$ A, $B_a = 5,0$ G

positiv. Für diesen Fall erhalten wir mit dem Mehrbereichsmodell ebenfalls Anwachsrate-Kurven, deren Maxima gegen den Meßwert konvergieren.

Dies beweist die Möglichkeit, mit dem Mehrbereichsmodell zu einer vollständigen theoretischen Beschreibung der magnetischen Instabilität von Lichtbögen zu gelangen. Für die Behandlung von diffusen und von stromstarken Bögen ist sicher noch eine zusätzliche Aufteilung des elektrisch leitfähigen Innenbereichs notwendig, für die man dann ähnlich vorzugehen hat, wie wir dies für den Außenbereich gezeigt haben: die elektromagnetischen Gleichungen können dann nicht mehr, wie in unserem Fall, getrennt von dem Gleichungssystem aus Massen-, Impuls- und Leistungsbilanz gelöst werden, sondern ergänzen dieses dann zu einem noch umfangreicheren System von $n + 1$ linearen Differentialgleichungen für die Bogenauslenkung, wobei 1 die Anzahl der Innenbereiche ist.

Der numerische Aufwand für eine solche Untersuchung wird dann natürlich noch weiter ansteigen, so daß man die anstehenden Probleme nach Möglichkeit mit dem einfachen Bogenmodell zu lösen versuchen sollte. Deshalb wollen wir zum Abschluß des theoretischen Teils dieser Arbeit die beiden Modelle mit Hinblick auf die Grenzen der Anwendbarkeit des einfachen Bogenmodells miteinander vergleichen.

4.5.7. Vergleich mit dem einfachen Bogenmodell

Aus Abb. 17 ist zu ersehen, daß die Mehrbereichsrechnungen hinsichtlich der Ganghöhe im Anwachsrate-Maximum eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit dem Experiment liefern als die Rechnungen für das einfache Bogenmodell. Diese Verbesserung beruht hauptsächlich auf der verbesserten Approximation der Zeitableitungen des Wärmestrompotentials mit den unterschiedlichen ε_{p} -Werten anstelle des einen

ξ_c -Wertes beim einfachen Modell, da sich, wie wir gesehen haben, die Werte für die kritische Ganghöhe an der Stabilitätsgrenze ($\dot{\xi} = 0$) bei beiden Modellen kaum unterscheiden. Die Verbesserung rührt wahrscheinlich von einer entsprechenden $\text{div } \vec{v}_1$ -Änderung beim zeitabhängigen Mehrbereichsmodell her, wodurch dann die viskosen Terme in der Impulsbilanz (vgl. Gl. 4.3.4.(2)) besser berücksichtigt werden.

Eine 40%ige Ungenauigkeit in der Ganghöhe (vgl. Kap. 4.4.2.2.) dürfte jedoch unter praktischen Gesichtspunkten kaum eine Rolle spielen, da für die Anwendung vor allem die Anwachsrate der Instabilität von Interesse sind. Die Maxima der Anwachsrate-Kurven für das einfache Bogenmodell stimmen jedoch bezüglich des Ω -Wertes sehr genau mit den experimentellen Ergebnissen überein (Abb. 12), so daß sich der numerische Aufwand für die Mehrbereichsrechnungen kaum lohnen dürfte, solange sich der stromführende Bogenbereich in guter Näherung durch das Kanalmodell beschreiben läßt. Diese Bedingung ist für unseren Wasserstoff-Lichtbogen mit $\tau_c < 0,2 \cdot R$ gut erfüllt.

Die ausgezeichneten theoretischen Anwachsrate-Ergebnisse, die schon das einfache Bogenmodell liefert, lassen sich offenbar darauf zurückführen, daß ξ in einem breiten Bogenbereich nahezu konstant ist. Dies läßt sich aus Abb. 16 entnehmen, aus der folgt, daß die Isothermengeschwindigkeit am Ort $r = R/2$ erst auf ca. 70% des Werts am Kanalrand abfällt. Erst bei wesentlich höheren als den hier realisierten Anwachsrate sind größere Fehler aufgrund der einfachen Isothermennäherung zu erwarten.

Den Einfluß der Näherungen α_p für die Größe $(\partial h / \partial (1/\rho_m))_{p,1}$, die in die Maeckerschen Zahlen eingeht, sehen wir besonders deutlich beim Mehrbereichsmodell: während zu große Werte

für den Innenbereich zu viel zu hohen Anwachsrate führen (obere Kurve in Abb. 17), ergibt eine Überbewertung der großen MK_p -Werte im kalten Außenbereich viel zu geringe Anwachsrate (untere Kurve in Abb. 17, vgl. auch Abb. 34 im Anhang). Im ersten Fall wird die Wärmekapazität des heißen, im zweiten Fall die des kalten Bogengases überbewertet. Die mit $\text{div } \vec{v}$ gewichtete Mittelwertbildung $/1/$ für α liefert jedoch beim einfachen Bogenmodell, ebenso wie im zeitunabhängigen Grenzfall, gute Ergebnisse.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß sich das einfache Bogenmodell mit den angegebenen Näherungen dann vorteilhaft einsetzen lassen wird, wenn die radiale Änderung der Stromdichte vernachlässigt werden kann. Für diffuse und stromstarke Bögen wird man jedoch geeignete Weiterentwicklungen unseres Mehrbereichsmodells einsetzen müssen. Dabei darf dann auch die Mittelwert-Näherung für $(\partial R / \partial (1/s_m))_p$ nicht mehr benutzt werden. Der erhebliche numerische Aufwand für das Mehrbereichsmodell sollte sich begrenzen lassen, indem man z. B. die rechenzeitintensiven Reihenberechnungen durch die Berechnung geeigneter einfacher Näherungsfunktionen ersetzt.

Zum Abschluß der theoretischen Untersuchungen wollen wir noch darauf hinweisen, daß sich unser einfaches Bogenmodell auch für die Behandlung trägheitsbestimmter Lichtbögen mit großen Anwachsrate heranziehen läßt. Dazu setzt man in Gl. 4.3.4.1. (2) für die Divergenz der Impulsbilanz den bisher vernachlässigten Trägheitsterm mit

$$\text{div} \left(s_m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = - \frac{\partial^2 s_m}{\partial t^2} = \frac{\infty}{\epsilon_\infty} \cdot \frac{ds_{H0}}{dr}$$

an. Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe der Massenbilanz und der Isothermen-Näherung für die Zeitableitungen auf-

stellen (die beiden anderen Trägheitsterme können vernachlässigt werden, weil die Beschleunigung der z-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit und die Beschleunigung der Rotation von $\vec{v}$ für die magnetische Instabilität keine Rolle spielen). Man erhält dann anstelle von Gl. 4.3.7. (7) eine vollständige quantitative Version der Gleichung, die in /13/ für die magnetische Instabilität von Lichtbögen aufgestellt wurde.

5. Experimentelle Untersuchung der magnetischen Instabilität von Bogenentladungen

Für die experimentelle Untersuchung der magnetischen Lichtbogeninstabilität und die Prüfung der zeitabhängigen Stabilitätstheorie wird ein wandstabilisierter Niederstrom-Wasserstoffbogen bei Atmosphärendruck eingesetzt, für den vollständige Datensätze hinsichtlich der thermischen und elektrischen Eigenschaften vorliegen /1/. Der Wasserstoff-Lichtbogen niederer Stromstärke zeichnet sich insbesondere durch einen relativ scharf begrenzten und engen stromführenden Bereich ($r_c/R \leq 0,2$) aus, was auf den steilen Anstieg der elektrischen Leitfähigkeit im elektrisch leitenden Gebiet und auf die hohe Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffs bei Temperaturen unterhalb des Einsatzpunktes der elektrischen Leitfähigkeit zurückzuführen ist. Daher läßt sich der Wasserstoffbogen gut durch ein Kanalmodell beschreiben, wie wir es beim einfachen Bogenmodell unserer Theorie benutzt haben.

In einem Gefäß von 20 mm Durchmesser wird der Wasserstoffbogen bei 9,35 A Bogenstrom ohne Fremdmagnetfeld instabil. In diesem Stromstärkenbereich spielt die Strahlung ebenso wenig eine Rolle wie die Massenträgheit beim instabilen Bogen, so daß wir diese Effekte bei der theoretischen Behandlung des Bogens für den Bereich in der Nähe der Stabilitätsgrenze vernachlässigen konnten.

Die experimentellen Untersuchungen haben die Prüfung der theoretischen Aussagen über den Einfluß eines axialen Fremdmagnetfeldes auf die Bogenstabilität und über die Anwachsrate der Instabilität mit und ohne Fremdmagnetfeld zum Ziel. Abb. 18 zeigt eine Übersichtsfotografie des experimentellen Aufbaus. Die Meßergebnisse wurden bereits im theoretischen Teil der Arbeit angegeben. Im folgenden sollen der experimentelle Aufbau und die Meßmethoden erläutert werden.

5.1. Experimentelle Anordnung für die Messung der magnetfeldabhängigen Stabilitätsgrenzen

Die experimentelle Anordnung für den Betrieb des Wasserstoff-Lichtbogens besteht aus dem Bogengefäß, der Gasversorgung, der stromgeregelten Gleichrichteranlage und den Einrichtungen zur Messung von Bogenstrom und Gasdruck. Zum Aufbau für die Messung der magnetfeldabhängigen Stabilitätsgrenzen gehören außerdem zwei Vorrichtungen für die Erzeugung eines horizontalen Magnetfeldes und eines vertikalen Magnetfeldes.

5.1.1. Entladungsgefäß

Das Gefäß für den Wasserstoff-Lichtbogen wurde ähnlich der in /1/ beschriebenen Anordnung aufgebaut. Abb. 19 zeigt als Prinzipzeichnung einen Querschnitt durch das Bogengefäß, Abb. 20 einen Wasserstoff-Lichtbogen in diesem Gefäß. Er brennt in dem doppelwandigen wassergekühlten Glasrohr zwischen den Wolfram-Spitzen zweier ebenfalls wassergekühlter Elektroden. Der Bogen wurde ausschließlich vertikal betrieben.

Das innere Rohr von 20 mm $\varnothing$ und einer Wandstärke von 1 mm besteht aus Quarzglas. Dieses Quarzrohr muß vor dem Gebrauch ca. 15 min lang bei 1000°C getempert werden, um zu vermeiden, daß die relativ große thermische Wandbelastung durch den Wasserstoff-Lichtbogen (Leistungsumsatz größer als 1 kW pro cm Bogenlänge) zum Platzen des Rohres führt. Außerdem muß das Quarzrohr sehr sauber sein, weil bereits geringe Verschmutzungen (z.B. eingebrannte Fingerabdrücke) zu einer zwar nur geringen Strahlungsabsorption führen, die aber doch zu Abweichungen in der Zylindersymmetrie der Randbedingungen für den Bogen führen, welche sich dann auf die Bogenlage auswirken können (Verlagerung aus der Achse in Richtung zur Verschmutzung). Das Außenrohr besteht aus Duran oder Plexiglas, je nach Bedarf (s. u.); sein Außendurchmesser beträgt 30 mm.

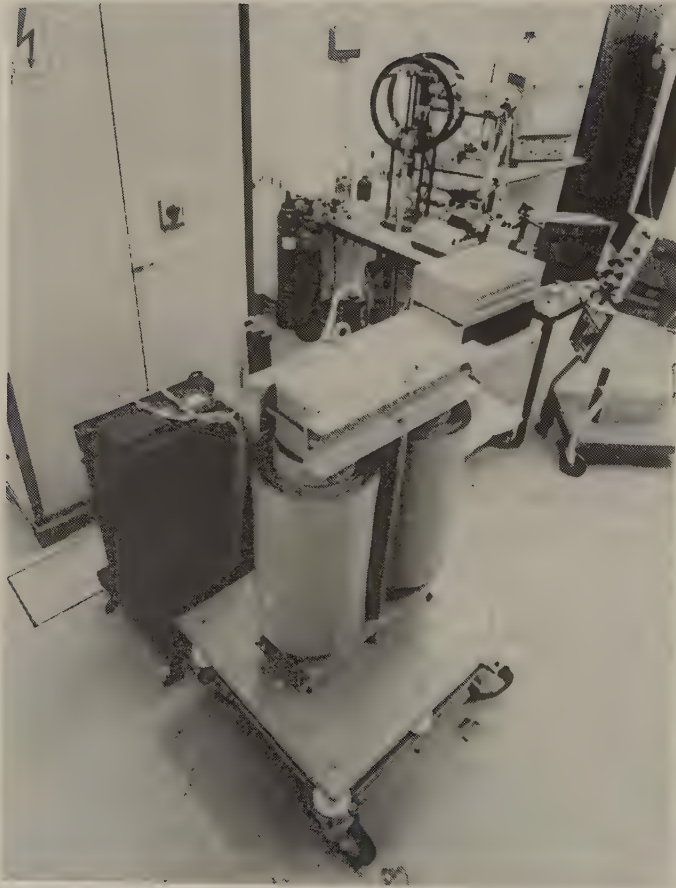


Abb. 18 Experimenteller Aufbau

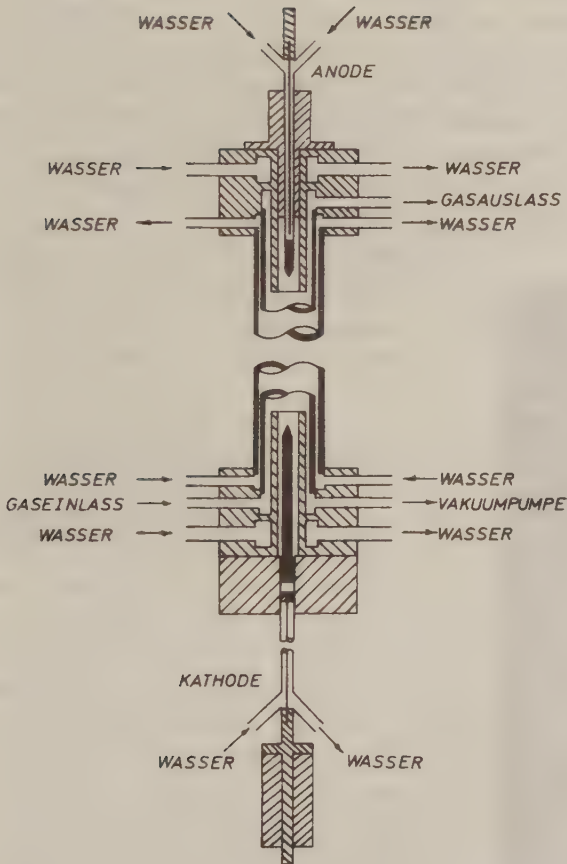
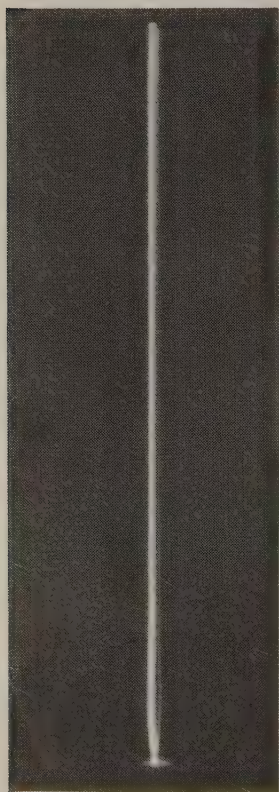


Abb. 19 Querschnitt durch das Bogengefäß

Die Gesamtlänge des brennenden Lichtbogens beträgt 22 cm; die Bogenenden sind jeweils 1 cm tief in gekühlten Kupfertuben versenkt. Dadurch wird der Gefäßdurchmesser an den Enden auf 9 mm reduziert und der Bogen vor den Elektroden verstärkt wandstabilisiert, so daß der größte Teil der Bogensäule frei von Elektrodeneinflüssen ist. Der Außendurchmesser der Kupfertuben beträgt 18 mm, so daß die Wärmeleitung in der Tubenwandung bei normalem Bogenbetrieb ausreicht, um mit der in Abb. 19 skizzierten Wasserkühlung an den äußeren Tubenenden auszukommen. Für den Betrieb des Lichtbogens im eigeninstabilen Bereich oberhalb der Grenzstromstärke (s. u.: Regelkreis-Stabilisierung des Bogens) mußten jedoch Kupfertuben verwendet werden, bei denen die Wasserkühlung

bis in die inneren bogennahen Tubenenden geführt wurde. Die beiden Tuben sind gegen die Elektroden elektrisch isoliert.



Zur Zündung des Lichtbogens wird die Kathode in das Gefäß hineingeschoben, bis die Kathodenspitze mit der Anodenspitze

Abb. 20 Stabiler H_2 -Bogen bei $I_B = 8,0 \text{ A}$, $p = 1040 \text{ mbar}$. Der Bogen wird durch die Wechselwirkung mit der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes seitlich aus der Gefäßachse ausgelenkt.

elektrischen Kontakt hat. Nach Einstellen eines geeigneten Zündstromes von 8,0 A wird dann die Kathode wieder herausgezogen, bis der Lichtbogen die Gesamtlänge von 22 cm hat. Das wassergekühlte Kathodenrohr gleitet dabei durch eine Führung mit radialer Vakuumdichtung.

Für die Untersuchung der magnetischen Lichtbogeninstabilität muß der Lichtbogen in einer reinen Wasserstoff-Atmosphäre von konstantem Druck ohne Gasdurchströmung brennen. Das Bogengefäß ist daher mit Hilfe von O-Ring-Dichtungen hochvakuumdicht aufgebaut. Die Dichtungen müssen beständig gegen Temperaturen bis nahe 100°C und gegen Verunreinigungen im Kühlwasser sein, weshalb Viton als Dichtungsmaterial verwendet wird.

5.1.2. Gasversorgung

Das Bogengefäß ist zur Evakuierung an einer zweistufigen Drehschieber-Vakuumpumpe angeschlossen. Das Vakuum wird mit einem Wärmeleitungs-Vakuummeter gemessen. Zum Spülen des Bogengefäßes und der Gasleitungen mit einem Inertgas ist an der Bogenapparatur außerdem noch eine Argon-Gasflasche angeschlossen. Nach dem Evakuieren wird das Bogengefäß über einen hochvakuumevakuierbaren Druckminderer mit Wasserstoff der Qualität "extrem rein" auf einen Druck von ca. 820 mbar gefüllt. Die Kathode ist dabei bis zur Gegenelektrode in das Gefäß hineingeschoben. Nach dem Zünden und Auseinanderziehen des Bogens steigt der Druck durch die Aufheizung des Bogen-gases auf ca. 1040 mbar an. Der Solldruck von 1040 mbar wird dann für jede Bogenstromstärke durch zusätzlichen Gaseinlaß oder Abbrennen überschüssigen Wasserstoffs an einer Quarzglasdüse genau eingestellt.

Der Füllgasdruck muß sehr genau gemessen werden, weil die Maeckersche Zahl des Lichtbogens in erster Näherung propor-

tional zum Druck ist (vgl. /11/). Eine Druckerhöhung von 3 mbar bewirkt bereits eine Absenkung der Grenzstromstärke für das Einsetzen der Instabilität um ca. 1%. Zur Druckmessung dient ein Digital-Manometer (Consolidated Controls Corporation, Typ 50PM7-20BA) mit einer Auflösung von 1 mbar, dessen Druckaufnehmer am Gaseinlaß des Bogengefäßes angebracht ist. Um eine Reproduzierbarkeit besser als ± 2 mbar zu erreichen, muß das Gerät bei der Messung nicht nur seine Betriebstemperatur erreicht haben (ca. 1 h Warmlaufzeit), sondern wegen seiner schlechten Langzeitstabilität (Abweichungen von mehr als 10 mbar pro Woche) vor jedem Experiment auch neu geeicht werden. Zur Eichung des Manometers wurden die auf Normalnull bezogenen aktuellen Luftdruck-Angaben des Wetteramts Essen auf unsere Labor-Höhenlage von 140 m über NN umgerechnet. Der Sollwert von 1040 mbar für den Füllgasdruck wurde so gewählt, um einerseits möglichst nahe an dem Druckwert zu bleiben, für den in /1/ die elektrischen und thermischen Bogendaten ermittelt wurden (953 mbar), und andererseits sicher oberhalb der bei uns vorkommenden Atmosphärendruckwerte zu bleiben (Wasserstoff-Ablaß).

5.1.3. Stromversorgung

Der relativ große Spannungsbedarf des Wasserstoff-Lichtbogens von über 100 V/cm wurde mit Hilfe der in /24/ angegebenen E-I-Charakteristik ermittelt, um die Grenzdaten für das Netzgerät zum Betrieb des Bogens zu bestimmen. Zur Vermeidung eines erheblichen zusätzlichen Spannungsbedarfs und entsprechender ohmscher Verluste an einem Vorwiderstand, wie er üblicherweise zur Kompensation des negativen differentiellen Bogenwiderstands eingesetzt wird, haben wir das Bogengefäß über niederohmige Drosselspulen direkt am Hochspannungs-Netzgerät angeschlossen. Bei stromgeregeltem Betrieb läßt sich dann trotz der negativen Lichtbogencharakteristik ein stabiler Arbeitspunkt einstellen /1, 25/.

Abb. 21 zeigt die Bogenbetriebsschaltung. Das Hochspannungs-Netzgerät wurde von der Fa. Miebach in Dortmund gemäß unseren experimentellen Anforderungen als geregelte Gleichrichteranlage neu entwickelt. Das Gerät kann den Bogen mit einem Gleichstrom von bis zu 25 A bei einer Spannung bis zu 3000 V versorgen. Wegen des direkten Bogenanschlusses an das Netzgerät mußte die Anlage ohne die sonst übliche Parallelkapazität im Ausgang aufgebaut werden. Andernfalls hätte der Bogenstromkreis einen Schwingkreis mit Entdämpfung durch den Lichtbogen gebildet; die Stromglättung erfolgt deshalb rein

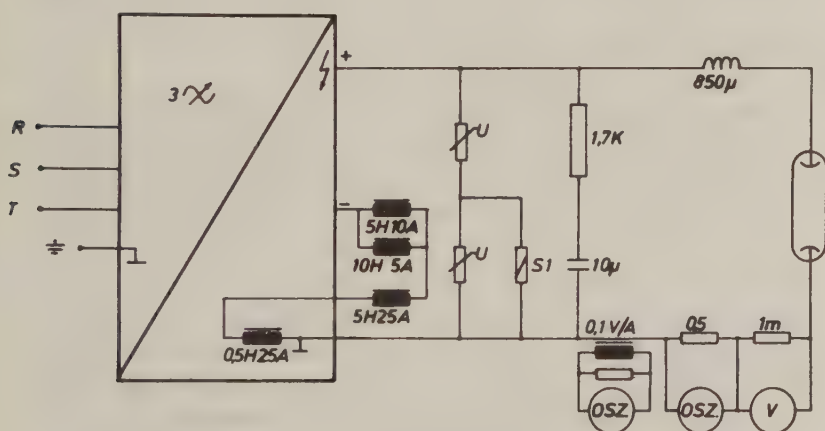


Abb. 21 Bogenbetriebsschaltung

induktiv mit den großen Drosseln (s. Abb. 18), die ohnehin zur Kompensation der negativen Lichtbogencharakteristik

benötigt werden. Die Restwelligkeit des Bogenstromes liegt bei der Schaltung nach Abb. 21 unter 1% für Stromstärken über 5 A.

Das Hochspannungs-Netzgerät kann mit der eingebauten Glättungsdrossel von 0,5 H allein nur zum Betrieb eines Lichtbogens mit einem größten negativen differentiellen Widerstand von $r_3 \approx -60 \Omega$ (Argonbogen von 2 A) eingesetzt werden. Um den beträchtlichen Wert von $r_3 \approx -600 \Omega$ unseres Wasserstoff-Lichtbogens bei einer Stromstärke von 5 A zu kompensieren, benötigen wir die zusätzlichen Drosselspulen von zusammen maximal 20 H (Abb. 21). Bei großen Bogenstromstärken wird der Bogenbetrieb daher nicht nur durch die Wendelinstabilität des Bogens, sondern auch praktisch durch die thermische Belastbarkeit der Drosseln eingeschränkt. Je nach Zusammenschaltung ist bei Stromstärken $I_B > 10 A$ ein maximal halbstündiger Bogenbetrieb möglich.

Für den Betrieb des Wasserstoff-Lichtbogens mit den zusätzlichen Drosseln mußte der PI-Regelverstärker des Hochspannungs-Netzgerätes entsprechend neu beschaltet werden. Nach der Beseitigung eines Fehlers in der Brummspannungs-Gegenkopplung /26/ konnte der Regler nach der Kompensationsmethode /27/ betragsoptimal abgestimmt werden, so daß der Wasserstoffbogen im gesamten Strombereich $I_B \geq 5 A$ bezüglich des Arbeitspunktes stabil betrieben werden kann (für kleinere Stromstärken als 5 A reicht die Ausgangsspannung des Netzgerätes von maximal 3000 V für die volle Bogenlänge nicht aus). Für die Regler-Optimierung kann der Lichtbogen wegen der großen Drossel-Induktivität vernachlässigt werden. Die Drosseln selbst wirken für die Regelung wie eine große Verzögerung 1. Ordnung, die mit einer Regler-Nachstellzeit von 1,4 sec kompensiert wird. Für die Proportionalverstärkung des Reglers ergab sich ein optimaler Wert von rund 210.

Um eine möglichst große Dämpfung von Regelschwingungen zu erzielen, haben wir eine solche langsame Regelung einer schnellen Bogenstromregelung /25/ vorgezogen. Mit dieser langsamen Regelung lassen sich auch bei der gepulsten magnetischen Destabilisierung des Bogens (s. u.) Regelschwingungen des Bogenstromes zuverlässig vermeiden.

Zur Unterdrückung hochfrequenter Schwingungen im Bogenstromkreis dient die unseren experimentellen Bedingungen angepaßte RLC-Beschaltung des Bogens (Abb. 21) gemäß /1/. Wegen seiner geringen thermischen Trägheit kann der Wasserstoff-Lichtbogen nach unseren Beobachtungen elektrische Schwingungen mit Frequenzen bis über 150 kHz verstärken. Die RLC-Beschaltung unterdrückt solche Schwingungen, die andernfalls aus der Entdämpfung des parasitären Schwingkreises aus Zuleitungsinduktivitäten und -kapazitäten resultieren würden.

Zur Beobachtung von Bogenstromschwingungen dienen ein Stromtransformator mit einem Übertragungsfaktor von 0,1 V/A und ein 0,5 Ω -Meßwiderstand. Für die genaue Messung des Bogenstroms wird ein Shunt von 1 m Ω benutzt, so daß der Strom mit einem Digitalvoltmeter (Keithley, Modell 179) mit einer absoluten Genauigkeit von $\pm 1\%$ gemessen werden kann.

Die Bogenbetriebsschaltung enthält außerdem noch einen Strömungswächter zur Abschaltung des Hochspannungs-Netzgerätes bei einer Unterbrechung in der Wasserkühlung des Lichtbogens sowie ein VDR-gesteuertes Relais (S1, Abb. 21), welches das Netzgerät abschaltet, sobald die Hochspannung einen Wert von 3,4 kV überschreitet. Weil sich bei einem plötzlichen Abreißen des Lichtbogens die dann an den Glättungs-drosseln induzierte Spannung zur Leerlaufspannung des Netzgerätes addiert, haben wir für diese Schaltung schnelle SIOV-Variatoren mit einer Ansprechzeit von ca. 25 ns verwendet. Damit

wird verhindert, daß Überspannungen am Bogengefäß zu einer Beschädigung der Vorrichtung für die Fremdmagnetfeld-Erzeugung führen können.

5.1.4. Magnetfelder und Einsatzpunkt der Wendelinstabilität

In Abb. 20 war bereits ein stabiler Lichtbogen zu sehen, der durch die Wechselwirkung mit der Horizontalkomponente $\vec{B}_{E\parallel}$ des Erdmagnetfeldes seitlich aus der Bogenachse ausgelenkt wird. Durch die dann asymmetrische Kühlung des Bogens wird die Grenzstromstärke für die Wendelinstabilität erhöht, während gleichzeitig die Vertikalkomponente $\vec{B}_{E\perp}$ des Erdmagnetfeldes destabilisierend wirkt. Zusammen ergibt sich, daß der Lichtbogen bereits bei $I_B = 9,0 \text{ A}$ magnetisch instabil

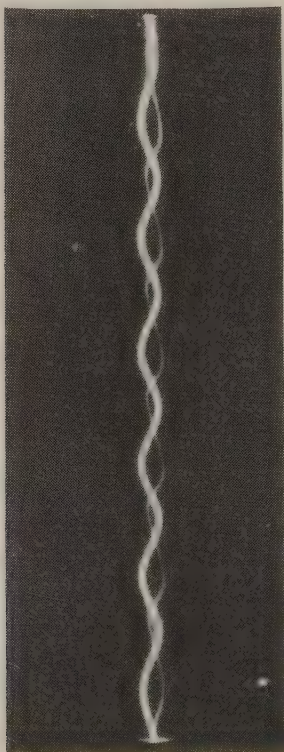


Abb. 22 Wendelnder H_2 -Bogen bei $I_B = 9,3 \text{ A}$, $p = 1040 \text{ mbar}$. Durch die Wechselwirkung mit dem Erdmagnetfeld wird der Bogen bei $9,0 \text{ A}$ magnetisch instabil.

wird, wobei wegen der Richtung von $\vec{B}_{E\perp}$ (positive Bogenstromrichtung) lediglich Rechtswendeln entstehen. Das Erdmagnetfeld muß also kompensiert werden, um die Bogeninstabilität unverfälscht messen zu können. Zur Kompensation der Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes dient eine Zylinderspule, die auf dem Außenrohr des Bogengefäßes angebracht wird. Für das Außenrohr wird zu diesem Zweck ein Plexiglasrohr verwendet, in welches zur Aufnahme des Spulendrahtes eine passende Wendel gedreht wird. Die Ganghöhe dieser Wendel wird mit 5 mm so gewählt, daß der Bogen weiterhin gut beobachtet werden kann und insbesondere die elektrooptische Bogenhelixmessung (s. u.) nicht behindert wird.

Mit der Zylinderspule wird nicht nur die Vertikalkomponente $\vec{B}_{E\perp}$ des Erdmagnetfeldes kompensiert, sondern auch das axiale Fremdmagnetfeld $\vec{B}_a$ erzeugt, das sich aus der Überlagerung des Spulenmagnetfeldes $\vec{B}_m$ mit dem Erdmagnetfeld zu

$$\vec{B}_a = \vec{B}_m + \vec{B}_{E\perp} \quad (1)$$

ergibt. Magnetfelder in positiver Stromrichtung ($\vec{e}_z$) werden positiv gezählt. Für das Spulenmagnetfeld gilt nach /28/ mit unserer Richtungsdefinition

$$\vec{B}_m = 2,55 \frac{G}{A} \cdot I_{FM} \cdot \vec{e}_z \quad (2)$$

in der Spulenmitte (Spulenlänge = 240 mm, Spulendurchmesser = 29 mm, Windungszahl = 49; zum Vorzeichen von I_{FM} vgl. Abb. 6).

Zu den Bogenenden hin nimmt $|\vec{B}_m|$ ab; die Spule ist so bemessen, daß das Feld auf 90% der Bogenlänge seinen Betrag um weniger als 5% ändert. Die Feldhomogenität wurde mit einem

Gaußmeter vom Typ BELL 640 mit Axialmeßsonde überprüft, wobei sich für $\vec{B}_m$ ein Meßwert von $|\vec{B}_m| = 2,51 \frac{G}{A} \cdot I_{FM} \pm 2\%$ ergab.

Die Horizontalkomponente $\vec{B}_{E||}$ des Erdmagnetfeldes wird mit Hilfe von Helmholtzspulen kompensiert, die nach /28/ berechnet werden. Die Spulenkörper haben einen Durchmesser von 456 mm und erzeugen über die gesamte Bogenlänge ein homogenes Feld von 0,231 G. Die Erdmagnetfeld-Kompensation wurde durch das Verschwinden der Ausrichtung einer Kompaßnadel geprüft, wobei sich Feldstärkeänderungen von 2% feststellen ließen.

Kompensiert man nur die Komponente $\vec{B}_{E||}$ des Erdmagnetfeldes, so setzt die magnetische Instabilität bei 8,85 statt 9,0 A ein. Kompensiert man auch die Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes, so liegt der Wendeleinsatz bei 9,35 A. Der Wert von $\vec{B}_{E\perp}$ wird dabei sehr genau durch die Beobachtung gemessen, daß erst bei exakter Kompensation mit

$$\vec{B}_{m0} = - 0,314 \text{ G} \cdot \vec{e}_z \quad (3)$$

(Reproduzierbarkeit besser als 1%) sich mit gleicher Häufigkeit das Entstehen von Links- und Rechtsschraubensinn-Helixbögen beobachten läßt.

5.2. Messung des kritischen Fremdmagnetfeldes und der kritischen Ganghöhe

Das kritische axiale Fremdmagnetfeld $\vec{B}_{acr}$, bei dem der eigenstabile Bogen grenzstabil wird, ergibt sich zu

$$\vec{B}_{acr} = \vec{B}_{mcr} + \vec{B}_{E\perp} \quad (4)$$

(vgl. Abschn. 5.1.4.). Die kritischen Werte B_{mcr} des Spulenmagnetfeldes haben wir im eigenstabilen Bogenstrombereich



unterhalb 9,35 A dadurch gemessen, daß wir bei festem Bogenstrom den Gleichstrom I_{FM} durch die Zylinderspule solange vergrößerten, bis sich bei einem kritischen Wert eine Abweichung von der Zylinderform der Bogensäule beobachten ließ. Damit ließ sich die kritische Feldstärke mit einer Reproduzierbarkeit von ca. 2% bestimmen.

Für die Messung der kritischen Ganghöhe λ_{cr} wird I_{FM} dann noch geringfügig weiter erhöht (um ca. 2%), so daß eine Bogenwendel mit kleiner Amplitude entsteht. Diese Helix kann dann photographisch ausgemessen werden. Abb. 23 zeigt eine solche Bogenhelix in Originalgröße für $I_B = 8,0 \text{ A}$ und $I_{FM} = -0,504 \text{ A}$. Wegen der Antiparallelität von Fremdmagnetfeld und Bogenstromrichtung hat die Helix in diesem Fall einen Linksschraubensinn. Die λ_{cr} -Werte lassen sich auf ca. $\pm 5\%$ genau messen.

Abb. 23

Bogen an der Stabilitätsgrenze bei $FM = FM_{cr}$

Die beiden B_{acr} -Messungen

$$|B_{acr}| = B_{m\uparrow} - B_{E\perp} \quad (2)$$

und

$$|B_{acr}| = B_{m\downarrow} + B_{E\perp} \quad (3)$$

für die Links- ($B_{m\uparrow} := -B_{mer} > B_{E\perp}$) und für die Rechts-schraubensinn-Bogenhelix ($B_{m\downarrow} := B_{mer} > -B_{E\perp}$) können auch zu einer genauen Messung der am Lichtbogenort wirk-samen Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes benutzt werden:

$$B_{E\perp} = \frac{B_{m\uparrow} - B_{m\downarrow}}{2} \quad (4)$$

Die Auswertung aller gemessenen ($B_{m\uparrow}, B_{m\downarrow}$)-Paare (vgl. Abb. 9) ergibt einen Wert von $B_{E\perp} = 0,314 \text{ G} \pm 1\%$; dieses Ergebnis stimmt völlig mit dem Ergebnis für B_m , überein (5.1.4. (3)), welches wir auf prinzipiell andere Weise gefunden haben (s. o.).

5.3. Experimentelle Anordnung für die Messung der Anwachsrate

Die Anwachsrate der magnetischen Lichtbogeninstabilität sollen unverfälscht von den Zeitkonstanten gemessen werden, mit denen der instabile Zustand erreicht wird. Die Anwachs-rate der Instabilität, die durch ein überkritisches axia-les Fremdmagnetfeld hervorgerufen wird, messen wir deshalb durch die Anwendung eines rechteckförmigen Magnetfeldpulses mit $|\hat{F}_M| > |F_{M\downarrow}|$ (s. Kap. 5.4.). Die Anstiegszeit des Impulses ist klein gegen die Zeitkonstante der Bogenbe-wegung. Zur Messung der Anwachsrate im eigeninstabilen

Bogenstrombereich haben wir eine Regelkreis-Stabilisierung entwickelt, die mit Hilfe eines schnell veränderlich geregelten axialen Fremdmagnetfeldes für die Aufrechterhaltung einer zylindrischen Form des an sich instabilen Lichtbogens sorgt. Zur Anwachsraten-Bestimmung kann diese Stabilisierung kurzzeitig ausgetastet werden (s. Kap. 5.5.).

In beiden Fällen, dem der Fremdmagnetfeld- und dem der Eigenmagnetfeld-bestimmten Instabilität, wird dann das zeitliche Anwachsen der Amplitude der Bogenhelix elektrooptisch gemessen. Die experimentelle Anordnung 5.1. wurde entsprechend erweitert, wie im folgenden beschrieben.

5.3.1. Bipolare, spannungsgesteuerte schnelle Stromquelle

Nach Theorie und Experiment (s. o.) reichen Feldstärken von wenigen Gauß für ein axiales Fremdmagnetfeld aus, um unseren Wasserstoff-Lichtbogen an die Stabilitätsgrenze zu bringen oder ihn zu destabilisieren. Zur Erzeugung solcher Magnetfelder dient die in 5.1.4. beschriebene einlagige Axialfeldspule oder eine ähnliche zweilagige Spule, die dann eine Induktivität von $31 \mu H$ hat. Mit dieser Spule können wir dann axiale Fremdmagnetfelder

$$\vec{B}_a = 5,1 \frac{G}{A} \cdot I_{FM} \cdot \vec{e}_z = FM \cdot B_{oc} \cdot \vec{e}_z \quad (1)$$

erzeugen (die Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes wird durch einen Nullpunktstrom von $-61,5 \text{ mA}$ bzw. -123 mA bei der einlagigen Spule kompensiert).

Der Spulenstrom I_{FM} muß von einer Stromquelle aufgebracht werden, die entweder durch rechteckförmige Spannungsimpulse aus einem Funktionsgenerator oder von der Ausgangsspannung eines Regelverstärkers angesteuert werden soll,

entsprechend den beiden Anwendungsfällen (s. o.). Bei der Entwicklung der Stromquelle waren deshalb insbesondere die folgenden Gesichtspunkte zu berücksichtigen: a) die Anstiegszeit der Stromquelle muß klein gegen die Zeitkonstanten der Bogenbewegung und ihre Grenzfrequenz groß gegen die Frequenz sein, mit der die Amplitude der Bogenhelix schwingen kann (vgl. Abschn. 5.3.3.); b) der Innenwiderstand der Stromquelle muß im gesamten Frequenzbereich sehr groß sein (möglichst ideales Stromquellenverhalten), um ein entsprechend schnell veränderliches Magnetfeld damit betreiben zu können; c) der Maximalwert des Stromes muß im gesamten Frequenzbereich groß genug sein, um eine genügend starke Gegensteuerung zur Bogenauslenkung durch die Instabilität erreichen zu können.

Um diesen Forderungen mit vertretbarem finanziellen und zeitlichen Aufwand gerecht zu werden, wurde mit Hilfe von Breitband-Operationsverstärkern und VMOS-Feldeffekt-Transistoren eine bipolare, spannungsgesteuerte Stromquelle mit $R_i \rightarrow \infty$ und mit einer maximalen Verlustleistung von rund 200 W aufgebaut. Sie ist in /29/ ausführlich beschrieben. Die Stromquelle kann einen maximalen Strom von 4,5 A bei Frequenzen bis zu 50 kHz durch die 31 μ H-Zylinderspule treiben. Damit wird dann ein axiales Fremdmagnetfeld von maximal 23 G erzeugt; die dabei an der Spule induzierte Spannung hat einen Scheitelwert von 44 V, der von der Stromquelle aufgebracht werden muß. Fällt diese Spannung nicht an der Induktivität, sondern - wie z.B. bei einem entsprechenden rechteckförmigen Stromverlauf - zeitlich überwiegend an der Stromquelle ab, so muß diese während dieser Zeitspanne die maximale Verlustleistung von rund 200 W umsetzen. Die Grenzfrequenz der Stromquelle beträgt ca. 100 kHz.

Bei der Entwicklung der Stromquelle erwies sich die Schwingneigung der Endstufen aufgrund der relativ großen

Eingangskapazität der VMOS-Transistoren und ihrer großen Rückwirkungskapazität in Zusammenwirkung mit der Eigenschaft der induktiven Last als nahezu ungedämpfter Schwingkreis als besondere Schwierigkeit. Dieses Problem konnte jedoch durch eine geeignete Kompensationsbeschaltung der Treiberstufen und die Auslegung der Endstufen als Kaskodenschaltungen vollständig gelöst werden /29/.

Die Stromquelle hat einen Übertragungsfaktor von -4 A/V . Eine Steuerspannungsänderung von $+1 \text{ V}$ bewirkt also eine Ausgangsstromänderung von -4 A . Kurzzeitig (20 ms) können Spitzenströme von 7 A geliefert werden. Außerdem kann ein konstanter Nullpunktstrom zur Kompensation der Vertikal-komponente des Erdmagnetfeldes eingestellt werden. Zur Messung des Spulenstroms ist die Stromquelle zusätzlich mit einem Präzisionsmeßwiderstand mit nachgeschaltetem Breitband-Meßverstärker ausgerüstet.

5.3.2. Elektrooptisches Helix-Meßgerät

Für die Messung von Amplitude und Schraubungssinn der zur Helix verformten instabilen Bogensäule wurde eine elektro-optische Meßvorrichtung entwickelt, deren Ausgangsspannung nach Betrag und Vorzeichen ein Maß für diese beiden Größen ist. Das Gerät wird in /30/ ausführlich beschrieben; wegen seiner Bedeutung für die Messungen wollen wir hier dennoch etwas näher darauf eingehen.

Das Blockschaltbild der Meßapparatur zeigt Abb. 24; die Anordnung der Meßköpfe X und Y des Helix-Meßgerätes am Bogengefäß ist auf dem Foto Abb. 25 zu sehen. Mit Hilfe von zwei Bikonvexlinsen von 40 mm Brennweite wird ein dreifach vergrößertes Bild der Bogenhelix (fünffache Vergrößerung bei der Messung der FM-abhängigen Anwachsrate) auf je zwei

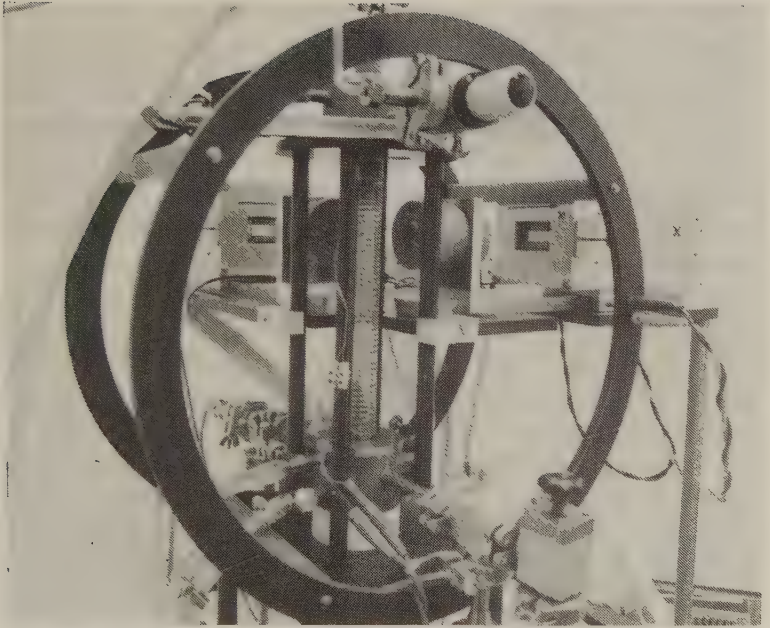


Abb. 25 Anordnung zur Helix-Messung

läßt sich nun in den "Schraubungssinn-Decodern" SD (Abb. 24) durch einfache Größenvergleiche der Koordinaten x_1 und x_2 bei gleichzeitiger Vorzeichenbestimmung von y_1 und y_2 und umgekehrt der Schraubensinn der Helix bestimmen /30/. Wird eine Rechtsschraube festgestellt, so erhält die Ausgangsspannung u_H ein positives, bei einer Linksschraube ein negatives Vorzeichen. Die Kontrolleinheit KE bewirkt außerdem ein Nullsetzen der Ausgangs-

spannung u_H bei widersprüchlichen Ergebnissen der beiden Decoder SD infolge fehlerhafter Meßbedingungen und bei geradem Bogen (Helix-Amplitude gleich Null oder kleiner gleich 0,5 bzw. 0,3 mm, s. u.), wenn beide Decoder keine Aussage machen können.

Die Fotodioden-Zeilen bestehen aus jeweils 16 direkt aneinandergereihten Silizium-Fotodioden BPX 92, deren Breite 1,5 mm beträgt und die eine lichtempfindliche Fläche von 1 mm Breite x 1,5 mm Höhe haben. Damit können in einer Koordinaten-Richtung jeweils Bogenbewegungen von minimal 0,5 mm aufgelöst werden, sofern der Abbildungsmaßstab 3:1 beträgt. Um eine größere Auflösung der Bogenbewegung zu erzielen, wäre die Verwendung von entsprechend kleineren Fotodioden nötig, die jedoch um ein Vielfaches teurer als die ohnehin schon recht kostspieligen BPX 92-Fotodioden wären. Eine Vergrößerung des Abbildungsmaßstabes bei der Regelungsanordnung bereitet Schwierigkeiten wegen des Bogenkanal-Durchmessers von über 1 mm, dessen vergrößertes Bild dann mehr als zwei Fotodioden ansprechen ließe, und wegen der Forderung, daß eine maximal zulässige Helix-Amplitude $\hat{\epsilon}_H = 3,5$ mm noch erfassbar sein muß. Die Beschränkung auf nur 16 Fotodioden je Zeile entsprechend $\pm 3,5$ mm Bogenauslenkung war notwendig, um den finanziellen und zeitlichen Aufwand für die Entwicklung des Helix-Meßgerätes in vertretbaren Grenzen zu halten. Für die Messung der FM-abhängigen Anwachsrate wird ein Abbildungsmaßstab 5:1 benutzt, so daß dann Bogenbewegungen von 0,3 mm aufgelöst werden können.

Die Messung der Helix-Amplitude ϵ_H erfolgt folgendermaßen: die beiden mittleren Fotodioden einer Zeile haben die Wertigkeit 0, die beiden äußeren die Wertigkeit -7 bzw. +7; spricht nun eine Fotodiode auf das Bogenbild an, so erzeugen die Prioritätsencoder PE digitale Signale, deren Wert der höchsten Wertigkeit der in einer Zeile beleuchteten

Fotodioden entspricht. Die Prioritätsencoder sind zusammen mit den Verstärkern, die eine Anpassung der Fotodioden-Empfindlichkeit an die Bogenhelligkeit ermöglichen, in die Meßköpfe des Helix-Meßgerätes eingebaut. Im Hauptgerät, das auch die Schraubungssinn-Decoder SD enthält, werden die Koordinaten-Werte digital quadriert und addiert, so daß sich zwei Werte für das Quadrat der Helix-Amplitude ergeben, die nach einer Digital-Analog-Wandlung, Mittelung und Radizierung einen Betrag der Ausgangsspannung U_H ergeben, welcher der Helix-Amplitude proportional ist, wenn man von der Quantisierung $\Delta \epsilon_x = 0,5 \text{ mm}$ (bzw. $0,3 \text{ mm}$) absieht.

Der Übertragungsfaktor des Helix-Meßgerätes hat einen Mittelwert von 2 V/mm (bzw. $3,3 \text{ V/mm}$); das Vorzeichen der Ausgangsspannung U_H ist gleich dem Vorzeichen der Bogenauslenkung ϵ_x , die wir für eine Rechtsschraubenhelix positiv und für eine Linksschraubenhelix negativ zählen (s. Kap. 4.4.1.1.). Bedingt durch die Signallaufzeiten in der Digital-Elektronik (TTL-Bausteine) hat das Gerät eine Totzeit $T_H = 4 \mu s$, die jedoch klein gegen die Zeitkonstanten der Bogenbewegung ist, so daß wir sie bei den folgenden Betrachtungen zum Regelsystem wie die Zeitkonstante einer Verzögerung 1. Ordnung behandeln können.

5.3.3. Regelsystem zur Stabilisierung des eigeninstabilen Lichtbogens

Unsere Theorie der magnetischen Instabilität von Lichtbögen liefert eine Zeitfunktion

$$\epsilon_x = \epsilon_0 \cdot \exp \left[\Omega_0 \cdot \int_0^t \left(1 + \operatorname{sgn}(\epsilon_x) \cdot \frac{F_H(t')}{|F_H(t')|} \right) dt' \right] \quad (1)$$

für die Bogenauslenkung ϵ_x ($|\epsilon_x| \ll R$) und zeigt damit eine Stabilisierungsmöglichkeit für den oberhalb seiner Grenzstrom-

stärke eigeninstabilen Bogen auf (vgl. Kap. 4.4.2.3.). Diese Möglichkeit haben wir durch den Aufbau eines entsprechenden Regelkreises realisiert: die Bogenauslenkung ε_e und der jeweilige Schraubensinn $\text{sgn}(\varepsilon_e)$ der Helix werden in Form der Ausgangsspannung U_H des Helix-Meßgerätes einem geeigneten Regler als Regelgröße (Istwert) zugeführt. Der Regler sorgt dann entsprechend der Abweichung der Regelgröße von der Führungsgröße (Sollwert = 0) dafür, daß das Fremdmagnetfeld $\vec{B}_a$ (Gl. 5.3.1. (1)) zeitlich veränderlich nach Betrag und Richtung so eingestellt wird, daß fast immer

$$\text{sgn}(\varepsilon_e) \cdot \frac{FM(t)}{|FM_{cr}|} \leq -1 \quad (2)$$

gilt, die Helix-Amplitude also klein bleibt ($|\varepsilon_e| \ll R$).

Den prinzipiellen Aufbau des Regelsystems zeigt das Blockschaltbild Abb. 26 oben. Zur Untersuchung des Regelsystems werden wir im folgenden die Störübertragungsfunktion für einen genäherten Ersatzregelkreis (Abb. 26, unten) herleiten, aus der sich insbesondere die Grundfrequenz der bleibenden Regelschwingungen berechnen läßt, die sich wegen der nichtlinearen Kennlinie des Helix-Meßgerätes nicht vermeiden lassen. Diese Frequenz ist in erster Linie durch die Anwachsrate der Bogeninstabilität bestimmt, so daß sich aus ihrer Kenntnis erste Aussagen über die Anwachsrate im eigeninstabilen Bogenstrombereich ableiten lassen. Die Analyse des Regelsystems folgt aufgrund unserer Näherungen (s. u.) den in /27/ und /31, 32/ angegebenen Methoden für einfache lineare Regelkreise.

Das Regelsystem besteht aus einem Regler, dessen Ausgangsspannung U_R die bipolare Stromquelle ansteuert, deren Ausgangsstrom I_{FM} über die Axialfeldspule einen Fremdmagnetfeld-Faktor FM^* erzeugt (s. u.), dem Lichtbogen, dem Helix-

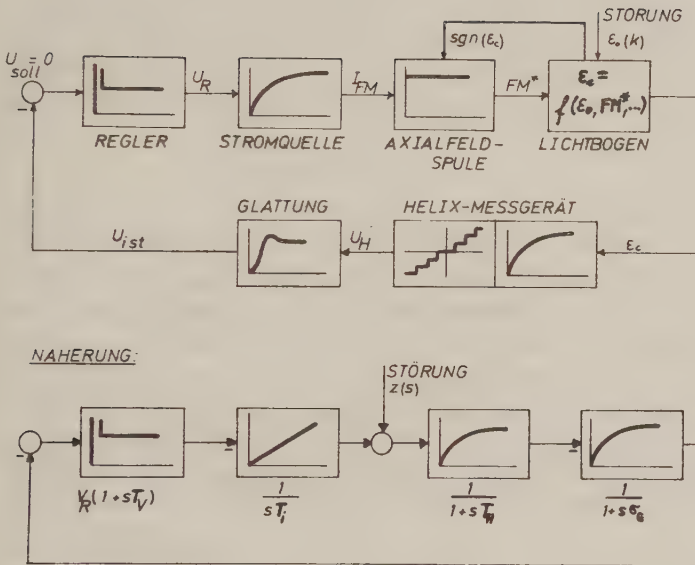


Abb. 26 Regelsystem

Meßgerät (HM) und einem Übertragungsglied zur Glättung der quantisierten Meßgerät-Ausgangsspannung U_H . Die Ausgangsspannung U_{ist} des Glättungsgliedes wird dem Regler als Regelgröße zugeführt und außerdem als Istwert der Bogenauslenkung oszillographisch angezeigt (nicht eingezeichnet).

Der Regler ist als PD-Regler ohne Integralanteil aufgebaut, weil die Helix-Amplitude $\mathcal{E}_c$ wegen der HM-Nicht-linearität prinzipiell nicht auf Null geregelt werden kann, sondern bleibende Schwingungen um die Nullage ausführen wird. Die Regelgröße u_{ist} wird dann Rechteck-Schwingungen ausführen, so daß ein I-Anteil nur nachteilig wirken könnte (Verschlechterung von Anregel- und Übersteuerungs-Verhalten des Reglers). Der Differentialvorhalt des Reglers soll hingegen der Tatsache Rechnung tragen, daß sich die Regelgröße i. a. erst dann ändern wird, wenn sich die Lichtbogenauslenkung bereits um 0,5 mm verändert hat.

Für die Regelkreisuntersuchung führen wir nun eine harmonische Linearisierung durch /33/, d. h. wir ersetzen die nichtlinearen Übertragungsglieder (Lichtbogen und Helix-Meßgerät) durch lineare Näherungen und nehmen an, daß die Bogenauslenkung sinusförmig mit der Grundfrequenz der rechteckförmigen u_{ist} -Schwingung oszilliert. Diese Voraussetzung der Unterdrückung höherer Fourierkomponenten bei der $\mathcal{E}_c$ -Schwingung ist wegen des Integralcharakters der Regelstrecke (Lichtbogen) bei relativ großer Integrierzeit gut erfüllt.

Der Lichtbogen wird durch die aus unserer Bogenstabilitätstheorie abgeleitete Zeitfunktion für $\mathcal{E}_c$, Gl. (1), beschrieben. Wirkt auf den Lichtbogen zur Zeit $t = 0$ eine sprunghörmige Störung $\mathcal{E}_0(k)$ der Ganghöhe $\lambda = 2\pi/k$ ein, so ist seine Sprungantwort durch Gl. (1) gegeben, die außerdem den nichtlinearen Zusammenhang zwischen axialem Fremdmagnetfeld $\vec{B}_a = FM \cdot B_{0c} \cdot \vec{e}_z$ und Bogenauslenkung $\mathcal{E}_c$ beschreibt.

Bei erfolgreicher Stabilisierung des instabilen Bogens ist $|\mathcal{E}_c| \ll R$. Das Argument der Exponentialfunktion in Gl. (1) ist dann klein, so daß wir anstelle von Gl. (1) mit

$$FM^*(t) := \operatorname{sgn}(\mathcal{E}_c) \cdot \frac{FM(t)}{|FM_{cr}|} \quad (3)$$

die Beziehung

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{T_0}\right) + \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^t FM^*(t') dt' \quad (4)$$

verwenden können. Wir sehen hier, daß die Helix-Orientierung über $\text{sgn}(\varepsilon_c)$ gleichsam auf die Axialfeldspule zurückwirkt, was auf die unterschiedliche Wirkung desselben Fremdmagnetfeldes je nach Schraubensinn der Bogenhelix zurückzuführen ist.

$$T_0 := 1/\Omega_0 \quad (5)$$

ist offenbar die Integrierzeit eines Integralgliedes mit

$$x(t) = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^t FM^*(t') dt' \quad (6)$$

Wenn wir ε_0 als die "Proportionalverstärkung" dieses Integralgliedes betrachten, können wir diese Lichtbogen-Eigenschaft, die die Wechselwirkung mit dem Fremdmagnetfeld ausdrückt, in unserem Ersatzregelkreis durch die Übertragungsfunktion

$$F_x(s) = \frac{\varepsilon_0}{s T_0} \quad (7)$$

beschreiben. s ist die komplexe Frequenz, die bei dem Übergang zur Frequenz-Darstellung mit Hilfe der Laplace-Transformation eingeführt wird. Für die "Proportionalverstärkung" ε_0 wählen wir den Maximalwert der Bogenauslenkung. Bei erfolgreicher Regelung sollte der Scheitelwert $\hat{\varepsilon}_c$ der Helix-Amplitude nicht größer als ca. 0,75 mm werden, so daß wir hier $\varepsilon_0 = \text{sgn}(\varepsilon_c) \hat{\varepsilon}_c = \text{sgn}(\varepsilon_c) \cdot 0,75 \text{ mm}$ setzen können.

Im Ersatzregelkreis ersetzen wir außerdem noch die Integrierzeit T_0 durch die Streckenintegrierzeit T_A mit

$$\begin{aligned}
 T_i &:= T_o / (\varepsilon_o v_{\pm} \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) v_H v_H) \\
 &= T_o / (\hat{\varepsilon}_c \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) v_{\pm} \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) v_H v_H) \quad (8) \\
 &= T_o / (\hat{\varepsilon}_c v_{\pm} v_H v_H),
 \end{aligned}$$

so daß sich für das Integralglied die Übertragungsfunktion

$$F_i(s) = \frac{1}{s T_i} \quad (9)$$

ergibt. Die Übertragungsfaktoren, die in die Streckenintegrierzzeit T_i eingehen, sind neben ε_o

- a) $v_{\pm} = 4 A/V$ für die Stromquelle,
- b) $\operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot v_H = \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot 5,1 \frac{G}{A} / |B_{\alpha_{ct}}|$ für die Axialfeldspule mit dem Übertragungsverhalten $FM^*(s)/I_{FM}(s) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_c) \cdot v_H$ und
- c) $v_H = 2 V/mm$ für das Helix-Meßgerät.

Das Helix-Meßgerät behandeln wir im vereinfachten Regelkreis nur noch als Verzögerung 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten $T_H = 4 \mu s$:

$$F_H(s) = \frac{1}{1 + s T_H} \quad (10)$$

Seine Beschreibungsfunktion können wir bei kleiner Auslenkung $\hat{\varepsilon}_c < 1 mm$ durch die Beschreibungsfunktion eines symmetrischen Dreipunktgliedes ersetzen. Sie zeigt, daß eine Schwingung mit $\hat{\varepsilon}_c = 0,75 mm$ amplitudenstabil wäre (Abnahme der Beschreibungsfunktion an dieser Stelle für wachsendes $\hat{\varepsilon}_c$), so daß wir sie nicht weiter zu berücksichtigen brauchen.

Das aktive Glättungsglied mit der Proportionalverstärkung 1, das als Verzögerung 2. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von 15 kHz und einem Dämpfungsfaktor $1/\sqrt{2}$ ausgelegt ist, können wir einfachheitshalber als Verzögerung 1. Ordnung

$$F_G(s) = \frac{1}{1 + s\sigma_G} \quad (11)$$

mit der Zeitkonstante $\sigma_G = 14 \mu s$ behandeln, falls die Grundfrequenz der Regelschwingung unter ca. 3 kHz bleibt. Die Vorzeichenumkehr am Glättungsglied und an der Stromquelle sind im Ersatzschaltbild durch die entsprechenden Minuszeichen gekennzeichnet.

Der Ersatzregelkreis besteht dann nur noch aus den 4 Übertragungsgliedern Integralglied F_I , Verzögerungsglied F_H , Verzögerungsglied F_G und Regler F_R :

$$F_R(s) = v_R \cdot (1 + sT_V) \quad (12)$$

Die Vorhaltzeit T_V wird ungefähr gleich T_i gewählt; da bei unseren Versuchsbedingungen $T_i > 100 \mu s$ ist, können wir damit die Verzögerungs-Zeitkonstante $\sigma_I = 1,6 \mu s$ der Stromquelle gegen den Reglervorhalt vernachlässigen. Die Proportionalverstärkung v_R des Reglers muß größer als ca. 0,2 sein, damit die Ringverstärkung $v_R v_I v_M \hat{\varepsilon}_c v_H > 1$ ist (für $v_M \approx 1 A^{-1}$ bei großen Bogenstromstärken), und kleiner als der Wert, der bei der minimalen u_{ist} -Amplitude von 1 V die Stromquelle an die Aussteuerungsgrenze bringt, also $v_R < 1,25$.

Den Störterm aus Gleichung (4)

$$z(t) = \varepsilon_o \cdot \left(1 + \frac{t}{T_o}\right) \quad (13)$$

benutzen wir nun, um das Störverhalten des Lichtbogens durch die Störung

$$Z(s) = U_E(s) \cdot \frac{1 + sT_0}{sT_0} \quad (14)$$

mit der "Störspannung" $U_E(s) = E_0(s) \cdot \mathcal{V}_H$ auszudrücken, die hinter dem Integralglied am Regelkreis angreift (s. Abb. 26. unten).

Damit ergibt sich dann schließlich für die Störübertragungsfunktion $G_Z(s) = U_{ist}(s)/U_E(s)$ des Ersatzregelkreises:

$$G_Z(s) = - \frac{T_i}{T_0} \cdot \frac{1 + sT_0}{\mathcal{V}_R + s(\mathcal{V}_R T_V + T_i) + s^2 T_i (T_H + \sigma_G) + s^3 T_i T_H \sigma_G} \quad (15)$$

Aus Gl. (15) folgt, daß das Ersatzregelsystem einschließlich dem besonderen Störverhalten $Z(s)$ für unsere Parameterwerte dem Stabilitätskriterium von Hurwitz genügt. Wegen der nicht-linearen Kennlinie des Helix-Meßgerätes wird sich freilich dennoch eine bleibende Schwingung einstellen. Die Anschwingbedingung dafür ist $G_Z(s) = -1$ für $s = j\omega$; der Imaginärteil des Frequenzgangs $G_Z(j\omega)$ muß verschwinden, woraus sich für ω_0 bei Vernachlässigung von $s^2 T_i T_H \sigma_G$ gegen $\mathcal{V}_R T_V + T_i$ die Bedingung

$$\mathcal{V}_R \cdot (T_0 - T_V) - T_i + s_0^2 T_0 T_i (T_H + \sigma_G) = 0 \quad (16)$$

für die Berechnung der Grundfrequenz der Regelschwingung ergibt. Es folgt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{V}_R (T_0 - T_V) - T_i}{T_0 T_i (T_H + \sigma_G)}} \quad (17)$$

Bei Verschwinden des Imaginärteils hat der Frequenzgang nach (15) den Realteil

$$\operatorname{Re} \{G_Z(j\omega_0)\} = - \frac{T_i (1 + \omega_0^2 T_0^2)}{v_R T_0 + \omega_0^2 T_0^2 (v_R T_V + T_i)} \quad (18)$$

dessen Betrag für eine Ringverstärkung $v_R T_0 / T_i > 1$ (s. o.) immer kleiner als 1 ist. Die Störung wird also gedämpft. Die Frequenz ω_0 sollte nun als Grundfrequenz der stabilen Regelschwingung mit rechteckförmiger Oszillation von u_{ist} zu messen sein.

Das Experiment zeigt, daß sich tatsächlich eine stabile Regelschwingung mit kleiner Helix-Amplitude ($\hat{u}_{ist} \approx 1 \text{ V} \hat{=} 0,5 \text{ mm} < \hat{e}_e \leq 1 \text{ mm}$) einstellen läßt. Abb. 27 zeigt ein Oszillogramm der Regelschwingung bei $I_B = 10 \text{ A}$ mit einer Regler-Einstellung $v_R = 0,6$, $T_V = 150 \mu\text{s}$. Oben ist u_{ist} oszillographiert, unten der Spulenstrom I_{FM} . Der Differentialvorhalt des Reglers führt zur Vollaussteuerung der Stromquelle.

Die Grundfrequenz der Regelschwingung ergibt sich aus dem Oszillogramm zu $f_0 = 2 \text{ kHz}$; dieser Wert stimmt mit dem theoretischen Wert $f_0 = 1,7 \text{ kHz}$ überein, den Gleichung (17) für diese Regelkreis-Parameter liefert.

Für $I_B = 10 \text{ A}$ erhalten wir eine optimale Regelung mit $0,5 \text{ mm} < \hat{e}_e \leq 1 \text{ mm}$ für $v_R = 1$ und $T_V = 300 \mu\text{s}$. Die Grundfrequenz der stabilen Regelschwingungen ist dann $f_0 = 2,9 \text{ kHz}$ (berechnet: $f_0 = 2,4 \text{ kHz}$). Die gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den berechneten Frequenzwerten zeigt, daß unsere Theorie der magnetischen Lichtbogeninstabilität auch für den technisch interessanten Aspekt der künstlichen Stabilisierung eines eigeninstabilen Bogens die richtigen Ergebnisse liefert.

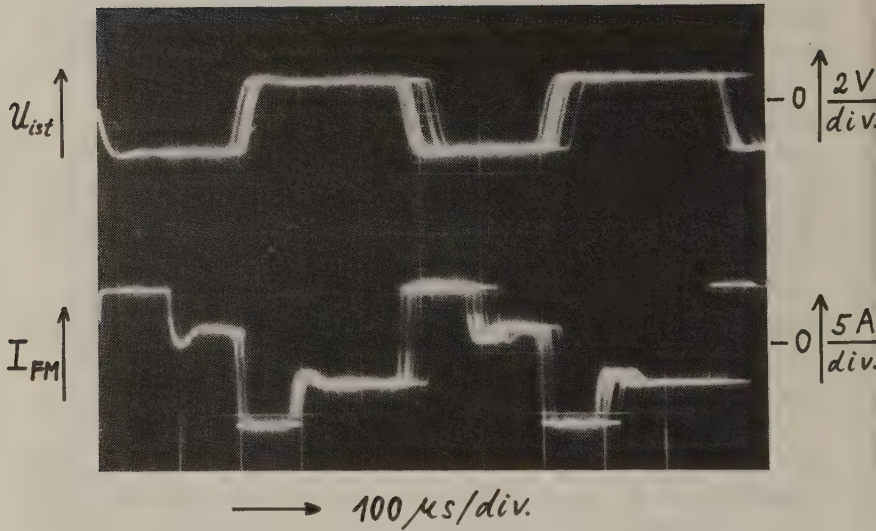
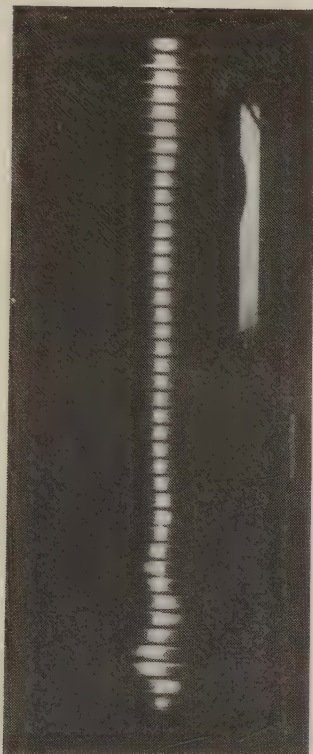


Abb. 27 Stabile Regelschwingung bei $I_B = 10 A$

Eine Bogenstabilisierung auf kleine $\hat{\varepsilon}_c$ -Werte auch bei Stromstärken $I_B > 11 A$ ließ sich mit dem jetzigen Bogenaufbau nicht erreichen, weil dann die Bogenfußpunktstörungen zu groß werden. Abb. 28 zeigt einen solchen Fall, bei dem der Bogen kurz vor dem Abreißen fotografiert wurde. Man erkennt sehr schön, daß sich die Instabilität am unteren



Bogenende nicht mehr beherrschen ließ. Da sich die Fußpunkt-Instabilität durch das axiale Fremdmagnetfeld nicht bekämpfen läßt, müßten für den Regelkreis-stabilisierten Bogenbetrieb bei Stromstärken über 11 A andere Maßnahmen getroffen werden. Ein Bogengefäß mit stärkerer Verengung an den Bogenenden als wir sie verwendet haben (von 20 auf 9 mm) würde die Fußpunktstörungen besser von der Bogensäule fernhalten.

Abb. 28

Abreißender Bogen

Die Abbildungen 29 und 30 zeigen Fotografien des Wasserstoff-Lichtbogens bei $I_B = 9,5 A$ vor und nach dem Einschalten des Reglers, die den Erfolg der Regelkreis-Bogenstabilisierung demonstrieren. Bei größeren Stromstärken kann der Lichtbogen nur bei eingeschalteter Regelung betrieben werden, weil andernfalls das Bogengefäß zerstört würde.

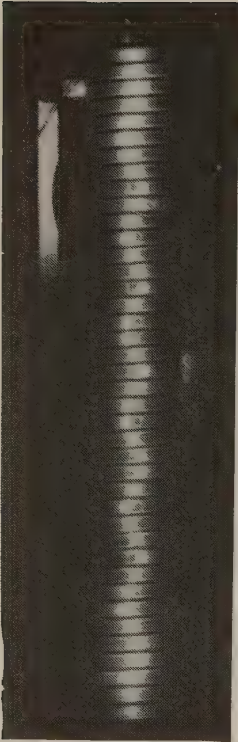


Abb. 29
Instabiler Lichtbogen



Abb. 30
Stabilisierter Lichtbogen

5.4. Messung der Fremdmagnetfeld-abhängigen Anwachsrate Ω_B

Um die Anwachsrate Ω_B zu messen, wird die oben beschriebene Stromquelle mit Rechteckimpulsen aus einem Funktionsgenerator HP 3312 A angesteuert. Der Rechteck-förmige Stromimpuls $I_{FM}(t)$ wird durch die einlagige Axialfeld-

spule (s. o.) getrieben und erzeugt einen Fremdmagnetfeld-Rechteckimpuls

$$B_a(t) = 2,52 \frac{G}{A} \cdot I_{FM}(t)$$

mit ca. $3,5 \mu s$ Anstiegszeit. Der Faktor 2,52 gilt am Ort der Helix-Messung in 60 mm axialer Entfernung von der Bogenmitte. Während der Dauer $\Delta t = t_2 - t_1$ eines überkritischen B_a -Impulses - für die Ω_B -Messungen wurden

$$B_a(t) = \begin{cases} 5 \text{ G} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$B_a(t) = \begin{cases} 10 \text{ G} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet - ist dann der Bogen instabil, und es entsteht eine Bogenhelix, deren Amplitude ϵ_x mit der Anwachsrate Ω_B anwächst. Die Pulsdauer wurde für die Messung der zeitlichen Änderung der Helix-Amplitude mit dem Helix-Meßgerät so gewählt, daß $\epsilon_x \approx 2 \text{ mm}$ blieb: $\Delta t \approx 0,2$ bis 2 ms. Die Wiederholfrequenz der Rechteckimpulse wurde mit ca. 50/s so eingestellt, daß eine über die gesamte Bogenlänge gleichmäßig pulsierende Helix-Amplitude entstand, was für die Messung mit dem Helix-Meßgerät erforderlich ist. Läßt man die Helix zwischen den Pulsen völlig abklingen, so entstehen nämlich durch den Einfluß der Anfangsstörungen ϵ_0 , die an den Bogenenden (Fußpunkt-Störungen) besonders groß sind, sehr ungleichmäßige Wendeln. Abb. 31 zeigt als Beispiel das mit 4 ms Belichtungs-

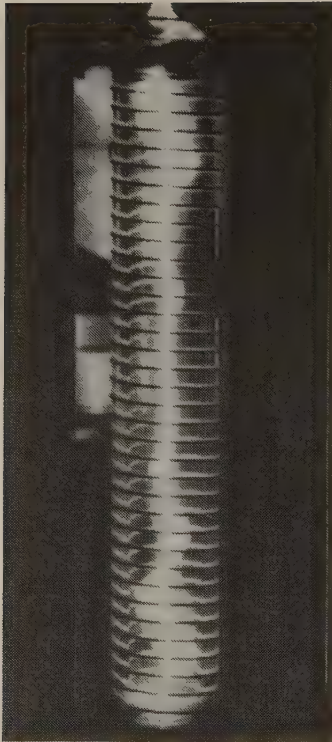


Abb. 31

$I_B = 9,0 \text{ A}$, $\hat{B}_a = 10 \text{ G}$, $\Delta t = 4 \text{ ms}$

zeit fotografierte integrale Bild einer anwachsenden Helix, die sich während der Anwesenheit eines 4 ms langen Fremdmagnetfeld-Impulses bildete. Die Helix-Amplitude wächst an den Enden stärker als in der Mitte, weil die Ruhelage des Bogens bei $FM = 0$ als Ausgangszustand diente. Indem man den Bogen nach Abschalten des Feldes vor dem erneuten Einschalten nicht wieder völlig in die Ruhelage zurückkehren läßt, kann man eine gleichmäßige Ausgangslage erzielen (was auf dem schnelleren Abklingen der größeren Auslenkungen beruht). Eine andere Möglichkeit, ein gleichmäßiges Anwachsen zu erreichen, besteht darin, das Fremdmagnetfeld zwischen den Pulsen nicht auf $FM = 0$

sondern nur auf $|FM|/S|FM_{et}$ zurückzuschalten. Damit können dann kleinere Pulsfolgefrequenzen verwendet

werden. Beide Methoden haben unterschiedliche Vorteile für die experimentelle Durchführung der Ω_B -Messungen, führen aber in jedem Fall zu denselben Ergebnissen und haben insbesondere auch keinen Einfluß auf die Ganghöhe der Bogenhelix. Dies konnte photographisch festgestellt werden: 1. wurde die wiederholt gepulste Bogenhelix fotografiert und ausge-

messen; 2. wurde eine mit einem Einzelpuls aus der Ruhelage heraus erzeugte Helix fotografiert und ausgemessen. Beide Methoden zeigten übereinstimmende Ergebnisse für λ . Für die Ganghöhen-Messung nach 2. haben wir eine BPX 92-Fotodiode in eine Canon F-1-Kamera eingebaut; sobald dann beim Öffnen des Kamera-Verschlusses das Bogenlicht auf die Diode fiel, wurde mit dem Fotodioden-Signal der Funktionsgenerator getriggert. Durch das Öffnen des Kameraverschlusses wurde also ein einzelner Fremdmagnetfeld-Impuls ausgelöst (Verzögerung $< 10 \mu s$). Auf diese Weise konnten die verschiedenen Stadien der Helix-Aufweitung, insbesondere auch bei sehr kleinen E_c -Werten, mit unterschiedlichen Belichtungszeiten erfaßt werden (Beispiel: Abb. 31; die Fotodiode ist oben als Schattenbild zu erkennen). Es zeigte sich, daß die Helix-Ganghöhe während des Anwachsens der Helix-Amplitude unverändert bleibt (innerhalb $\pm 5\%$ Meßgenauigkeit für λ).

Zur Bestimmung der Anwachsrate Ω_g wurden bei konstanter Pulsrate die Oszillogramme der ungeglätteten Ausgangsspannung u_H des Helix-Meßgerätes fotografiert und ausgewertet. Abb. 32 zeigt ein solches Oszillogramm, welches sich aus dem Übereinanderschreiben von zwei aufeinanderfolgenden Helix-(oben) und Fremdmagnetfeld- (unten) Pulsen ergeben hat.

Die Auswertung dieser Oszillogramme erfolgt durch halblogarithmisches Auftragen der diskreten Werte von $-u_H$ (bzw. $+u_H$ bei der Rechtsschraubenhelix) über den zugehörigen Sprungzeiten. Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden folgt dann die Anwachsrate Ω_g .

Der Wert, den wir so für Ω_g erhalten, ist durch die Quantisierung der Helix-Amplituden-Messung bei unterschiedlichen Fotodioden-Empfindlichkeiten natürlich entsprechend fehler-

$$I_B = 9,0 A$$

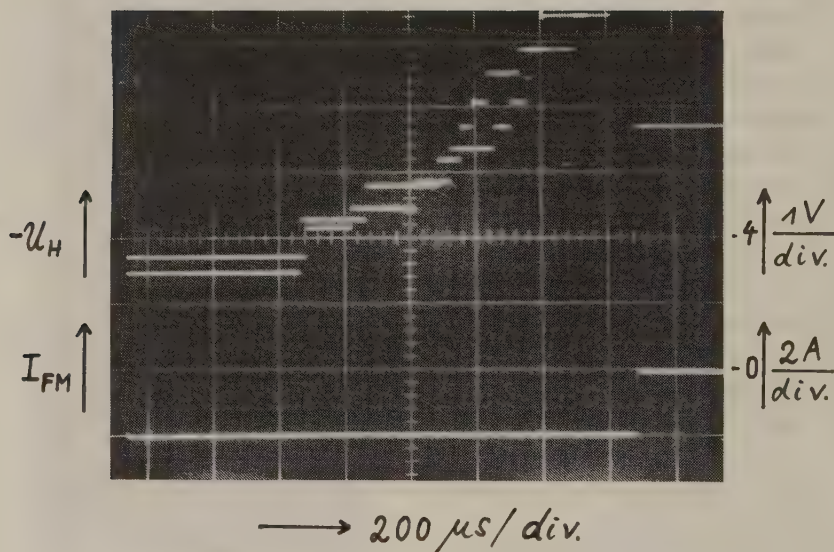


Abb. 32 Oszillogramm einer pulsierenden Bogenhelix mit Linksschraubensinn

behaftet: 1. die Unsicherheit in der Anfangslage (ca. eine Diodenbreite $\approx 0,3 \text{ mm} \approx 1 \text{ V}$) bewirkt einen systematischen Fehler von bis zu -5% ; 2. die Ansprechtolerenzen der Fotodioden (an jedem Meßpunkt sind Dioden aus allen vier Fotodiodenzeilen beteiligt, und zwar unterschiedliche Dioden je nach Lage der Bogenhelix) bewirken einen statistischen Fehler, der sich aus den Meßpunkten auf die übliche

Weise berechnen läßt (vgl. z. B. /34/). Der Fehler setzt sich aus den Einzelfehlern für die Steigung der Ausgleichsgeraden zu einem mittleren Fehler des entsprechend den Einzelfehlern gewogenen arithmetischen Mittels zusammen und beläuft sich auf bis zu $\pm 5\%$ (3 bis 5 gleiche Messungen für dieselben Versuchsbedingungen). Der gesamte Meßfehler beträgt demnach bis zu $+5$ oder -10% .

Im Rahmen dieser Meßgenauigkeit stimmen die Ergebnisse für die Anwachsraten Ω_B bei entsprechenden Bedingungen für die Links- und die Rechtsschrauben-Bogenhelix überein.

5.5. Messung der Anwachsraten Ω_0

Für die Messung der Anwachsraten Ω_0 ohne Fremdmagnetfeld wird der Lichtbogen Regelkreis-stabilisiert bei Stromstärken bis zu 11 A im eigeninstabilen Bereich betrieben. Durch die Auslösung der Oszillographen-Kamera (Oscillophot M 2) wird dann der Funktionsgenerator zur Erzeugung eines Rechteckimpulses angetriggert, welcher dann über einen schnellen Analogschalter (TL 191 CN) den Regelverstärker während der Dauer des Rechteckimpulses abschaltet. Während dieser Zeit fließt lediglich der Stromquellen-Nullpunktstrom zur Kompensation der Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes.

Die Bogenhelix wächst dann mit der Anwachsrate Ω_0 an, und zwar wächst die Amplitude über die gesamte Bogenlänge gleichmäßig an: die Ausgangslage ist ja durch die minimale Helix-Amplitude des Regelkreis-stabilisierten Bogens entsprechend vorgegeben. Bei präziser Kompensation des Erdfeldes entstehen mit gleicher Häufigkeit Links- und Rechtsschrauben der Bogenhelix. Abb. 33 zeigt das Oszillogramm der anwachsenden Bogenhelix bei $I_B = 10,7$ A.

$$I_B = 10,7 A$$

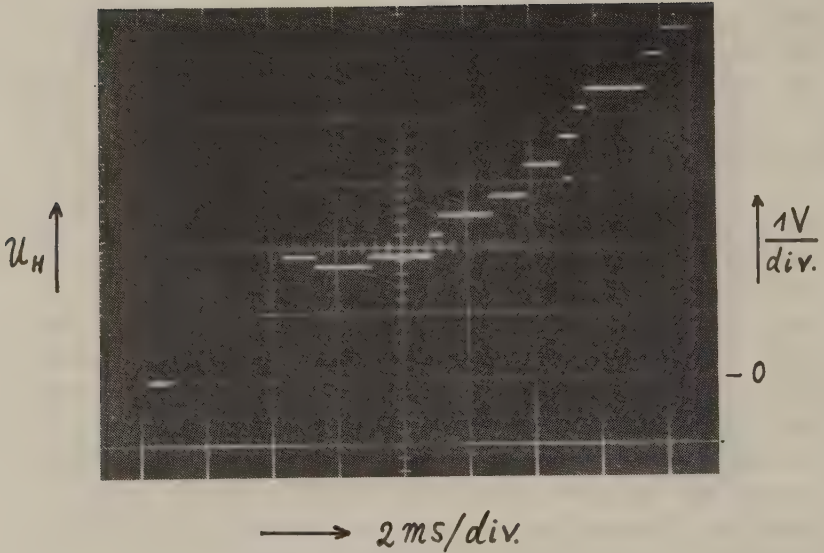


Abb. 33 Oszillogramm einer eigeninstabilen Bogensäule
(Rechtsschrauben-Helix); $1 V \cong 0,5 \text{ mm}$

Beim Wiedereinschalten der Regelkreis-Stabilisierung wird der Bogen i. a. zurück zur Achse getrieben, sofern die Helix-Amplitude nicht bereits aus dem Meßbereich des Helix-Meßgerätes gelaufen ist (bei der Regelkreis-Stabilisierung auf $\pm 3,5 \text{ mm}$ eingestellt, s. o.). Die Auswertung der Messungen folgt den Ausführungen in Kap. 5.4.

6. Schlußwort

Die Ergebnisse der Messungen wurden bereits im theoretischen Teil der Arbeit vorgestellt. Sie zeigen eine hervorragende Übereinstimmung mit den Resultaten der theoretischen Untersuchung. Die Messung der Anwachsrate von Instabilitäten im hydrodynamischen Problembereich wird im allgemeinen durch die Zeitkonstante verfälscht, mit welcher der instabile Bereich erreicht wird. Unseres Wissens war es durch die Entwicklung der oben beschriebenen Meßmethoden erstmalig möglich, solche Anwachsrate unverfälscht zu messen.

7. Anhang

7.1. Thermische und elektrische Bogendaten

Für unsere Rechnungen benötigen wir als thermische und elektrische Bogendaten in Abhängigkeit vom Bogenstrom den Kanalradius, die Maeckerschen Zahlen und die Bogenleistung. Die für die Berechnung dieser Größen benötigten exakten σ - und S -Verteilungen wurden in /1/ aus der numerischen Integration der Energiegleichung

$$\frac{1}{r^*} \cdot \frac{d}{dr^*} r^* \frac{dS}{dr^*} + \sigma E^2 R^2 = 0; \quad r^* := \frac{r}{R} \quad (1)$$

für den ungestörten zylindersymmetrischen Bogen gewonnen (s. z.B. /24/). Damit ließen sich dann auch die radialen Verteilungen der Viskosität des Bogengases und der Größe $(\partial h / \partial (1/\rho_m))_\rho$ berechnen. Die Daten aus /1/ (Index a) gelten für einen Wasserstoff-Lichtbogen in einem Gefäß mit einem Radius $R_a = 9,25 \text{ mm}$ und einem Füllgasdruck $p_a = 953 \text{ mbar}$ und lassen sich auf einfache Weise auf unsere experimentellen Bedingungen ($R = 10 \text{ mm}$, $p = 1040 \text{ mbar}$) umrechnen.

Die Ähnlichkeitsrelationen für zylindrische Lichtbögen (gleiche radiale Verteilungen bei gleicher Bogenleistung) lassen sich wie folgt anwenden: Beide Bögen müssen dieselbe $E \cdot R$ über I_B/R -Charakteristik haben; für dieselbe Bogenleistung sind daher die normierten Ströme ($I_B/R = I_{Ba}/R_a$) und die normierten Leitwerte gleich ($G/R^2 = G_a/R_a^2$). Für den Kanalradius gilt deshalb

$$r_c(I_B) = \frac{R}{R_a} \cdot r_c\left(I_B \cdot \frac{R_a}{R}\right) \quad (2)$$

und für die Größe $b = 2\pi S_a/L$ gilt:

$$b(I_B) = b_a \left(I_B \cdot \frac{R_a}{R} \right). \quad (3)$$

Die Konstante S_a aus der genäherten Zustandsgleichung hat den Wert

$$S_a = 30 \text{ W/cm} \quad (4)$$

Die Maeckerschen Zahlen enthalten den Bogenleitwert $G = I_B/E = I_B^2/L$ und müssen entsprechend umgerechnet werden. Außerdem enthalten sie noch den Mittelwert $\alpha = \langle (\partial h / \partial (1/S_M))_p \rangle$, der die Wärmekapazität c_p enthält und deshalb in erster Näherung proportional zum Gasdruck ist. In [1] werden anstelle der Maeckerschen Zahlen die Stabilitätskennzahlen St angegeben, die sich um einen Faktor π^2 von Mk unterscheiden. Daher folgt für die Umrechnung:

$$Mk(I_B) = \pi^2 \cdot St_a \left(I_B \cdot \frac{R_a}{R} \right) \cdot \frac{p}{p_a} \cdot \frac{R^2}{R_a^2} \quad (5)$$

Die Zeitkonstante τ können wir aus Gl. 4.3.5.2. (8) und (9) wie folgt berechnen:

$$\tau = Mk \cdot \frac{\eta \pi r_c^2}{\mu_0 I_B^2} \quad (6)$$

Für die Zähigkeit des Bogengases kann der konstante Mittelwert

$$\eta = 0,53 \cdot 10^{-3} \text{ Poise} \quad (7)$$

aus /1/ übernommen werden, weil die Viskosität bei dichten Gasen nur von der Temperatur, nicht aber vom Druck abhängt.

In der Tabelle sind die Werte von τ_e , b , Mk und τ für unseren Bogen in Abhängigkeit von der Bogenstromstärke aufgelistet.

I_B/A	τ_e/mm	b	Mk	$\tau/\mu s$
6,0	0,678	0,262	10,45	17,7
7,0	0,724	0,252	13,47	19,1
8,0	0,766	0,243	17,24	20,9
9,0	0,809	0,236	20,89	22,4
10,0	0,851	0,228	24,92	23,9
11,0	0,889	0,221	29,33	25,4
12,0	0,931	0,214	33,73	26,9
13,0	0,973	0,208	38,39	28,5
14,0	1,012	0,202	43,43	30,1
15,0	1,051	0,197	48,59	31,6
16,0	1,086	0,192	54,01	33,0
17,0	1,122	0,188	59,42	34,3
18,0	1,156	0,184	65,08	35,6

Tab. Bogendaten für $R = 10 \text{ mm}$, $p = 1040 \text{ mbar}$

Für die Mehrbereichsrechnungen benötigen wir die Maecker-
schen Zahlen Mk_p . Sie werden mit Hilfe der Daten in Abb. 34
berechnet, indem der Gesamtmittelwert $\bar{\alpha}$ über die $(\partial h / \partial (1/s_M))_p -$

Kurve und die Mittelwerte $\overline{\alpha}_v$ für die einzelnen Bereiche gemäß Gl. 4.5.1. (5) berechnet werden. Dann gilt:

$$Mk_v = Mk \cdot \overline{\alpha}_v / \overline{\alpha}. \quad (8)$$

Für $I_B = 10,0$ A verschiebt sich das Maximum der α -Kurve geringfügig nach außen; für die 10 A-Rechnungen haben wir jedoch einfachheitshalber ebenfalls die gezeigte Kurve benutzt.

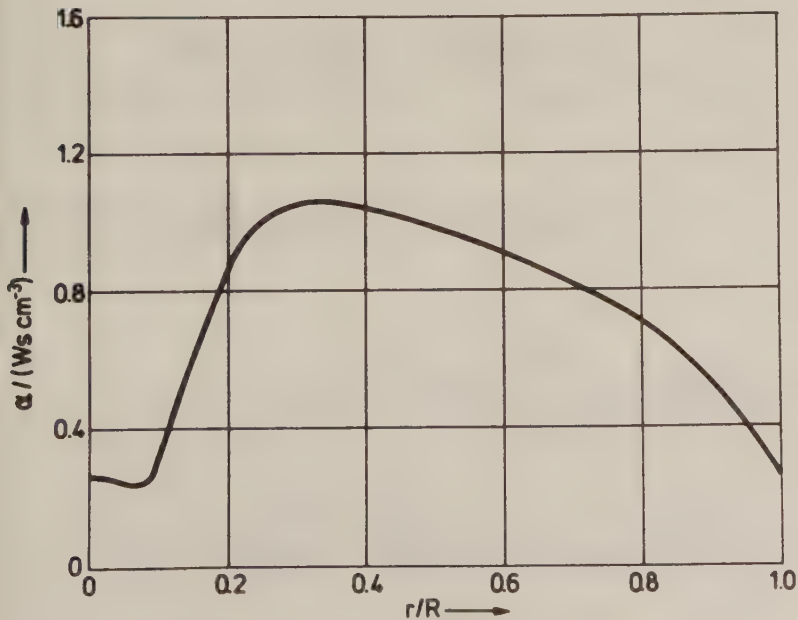


Abb. 34 $\alpha(r)$ -Kurve für $I_B = 9,0$ A, $R = 10$ mm (nach /1/)

7.2. Reihenentwicklungen und daraus abgeleitete Lösungen

Im folgenden sind die Teillösungen der Leistungsbilanzen im Innenbereich ($P_1(s)$ bis $P_5(s)$ für $0 \leq |s| \leq s_c$) und im Außenbereich ($g_1(s)$ bis $g_7(s)$ für $s_c \leq |s| \leq s_w$) aufgelistet.

$$1. \quad P_1(s) = s^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{2n}$$

$$a_n = \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \left[a_{n-1} - \frac{1}{(as_c)^{2(n+1)}} + \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^n \left(a_{n-m} \cdot \frac{4(n-m+1,5)}{(as_c)^{2m}} + \frac{(2m+1)(0,25)^m}{(as_c)^{2(n-m+1)} m! (m+1)!} \right) \right]$$

$$a_0 = -\frac{1}{8(as_c)^2} = -\frac{1}{8(1+x_A)s_c^2} ; \quad a^2 = 1+x_A$$

$$2. \quad P_2(s) = s^5 \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^{2n}$$

$$b_n = \frac{1}{4(n+2)(n+3)} \left[b_{n-1} - \frac{3}{8(as_c)^{2(n+1)}} + \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^n \left(b_{n-m} \cdot \frac{4(n-m+2,5)}{(as_c)^{2m}} + \frac{(0,5m+0,75)(0,25)^m}{(as_c)^{2(n-m+1)} m! (m+2)!} \right) \right]$$

$$b_0 = -\frac{1}{64(1+x_A)s_c^2} ; \quad x_A = 2 \left(\ln \frac{s_w}{s_c} + b \right)$$

$$3. \quad P_3(s) = s^7 \sum_{n=0}^{\infty} C_n s^{2n}$$

$$C_n = \frac{1}{4(n+3)(n+4)} \cdot \left[C_{n-1} - \frac{7}{16(a s_c)^{2(n+2)}} + \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^n \left(C_{n-m} \frac{4(n-m+3,5)}{(a s_c)^{2m}} + \frac{(\frac{7}{16} + \frac{3}{8} \cdot m)(0,25)^m}{(a s_c)^{2(n-m+2)} m! (m+1)!} \right) \right]$$

$$C_0 = - \frac{7}{768 \cdot [(1+x_A) s_c^2]^2}$$

$$4. \quad P_4(s) = s^5 \sum_{n=0}^{\infty} d_n s^{2n}$$

$$d_n = \frac{1}{4(n+2)(n+3)} \cdot \left[d_{n-1} + \frac{1}{2(a s_c)^{2(n+2)}} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \left(\frac{(m+0,5)(0,25)^m}{(a s_c)^{2(n-m+2)} m! (m+1)!} - d_{n-m} \frac{4(n-m+2,5)}{(a s_c)^{2m}} \right) \right]$$

$$d_0 = \frac{1}{48 \cdot [(1+x_A) s_c^2]^2}$$

$$5. \quad P_5(s) = s^3 \sum_{n=0}^{\infty} e_n s^{2n}$$

$$e_n = \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \cdot \left[e_{n-1} + \frac{2}{(a s_c)^{2(n+1)}} + \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^n e_{n-m} \cdot \frac{4(n-m+1,5)}{(a s_c)^{2m}} \right]$$

$$e_0 = \frac{1}{4 \cdot (1 + x_A) s_c^2}$$

$$6. \quad g_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \left(2 \ln \frac{s}{s_0} \right)^n ; \quad f_n \text{ s.u.}$$

$$7. \quad g_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(2 \ln \frac{s}{s_0} \right)^n ; \quad h_n \text{ s.u.}$$

$$g_n = - \frac{g_{n+1}}{x_A \cdot (n+2)} + \frac{g_n}{4(n+1)(n+2)} + \\ + \sum_{m=0}^n \frac{g_{n-m}}{(n+1)(n+2)} \cdot \left(\frac{s_0^2}{4m!} - \frac{n-m}{x_A^{m+2}} \right)$$

$$f_n = g_n(g_0=1, g_1=0) ; \quad h_n = g_n(g_0=0, g_1=1)$$

$$8. \quad g_3(s) = -\frac{x_A}{4} \cdot \left(g_2(s) \int_{s_0}^s \frac{g_1(s') I_1(s')}{b + \ln \frac{s_w}{s}} ds' + \right. \\ \left. - g_1(s) \int_{s_0}^s \frac{g_2(s') I_1(s')}{b + \ln \frac{s_w}{s}} ds' \right)$$

$$9. \quad g_4(s) = -\frac{x_A}{4} \cdot \left(g_2(s) \int_{s_0}^s \frac{g_1(s') K_1(s')}{b + \ln \frac{s_w}{s}} ds' + \right. \\ \left. - g_1(s) \int_{s_0}^s \frac{g_2(s') K_1(s')}{b + \ln \frac{s_w}{s}} ds' \right)$$

$$10. \quad g_5(s) = \frac{x_A}{4} \cdot \left(g_2(s) \int_{s_0}^s \frac{g_1(s') I_0(s')}{(b + \ln \frac{s_w}{s})^2} ds' + \right. \\ \left. - g_1(s) \int_{s_0}^s \frac{g_2(s') I_0(s')}{(b + \ln \frac{s_w}{s})^2} ds' \right)$$

$$11. \quad g_6(s) = -\frac{\bar{x}_A}{4} \cdot \left(g_2(s) \int_{s_0}^s \frac{g_1(s) K_0(s)}{(b + \ln \frac{s_w}{s})^2} ds + \right. \\ \left. - g_1(s) \int_{s_0}^s \frac{g_2(s) K_0(s)}{(b + \ln \frac{s_w}{s})^2} ds \right)$$

$$12. \quad g_7(s) = \frac{\bar{x}_A}{4} \cdot \left(g_2(s) \int_{s_0}^s \frac{g_1(s)}{(b + \ln \frac{s_w}{s})^2} ds + \right. \\ \left. - g_1(s) \int_{s_0}^s \frac{g_2(s)}{(b + \ln \frac{s_w}{s})^2} ds \right)$$

7.3. Symbole und Abkürzungen

A	Lösung, allgemein
a	$:= (1 + 2 \cdot \ln(\frac{S_w}{S_c}) + 2 \cdot b)^{1/2}$
a_M	$:= 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ gW/cm}^4$
$\vec{B}$	magnetische Flußdichte
b	$:= 2\pi S_a / L$
C	Menge der komplexen Zahlen
c_p	spez. Wärmekapazität bei konst. Druck
E	elektrische Feldstärke
$\left. \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{matrix} \right\}$	Einheitsvektoren
FM	Fremdmagnetfeld-Faktor
F_v	Lösungsfunktion für das Wärmestrompotential
G	Bogenleitwert
G_v	Lösungsfunktion für das Wärmestrompotential
h	spezifische Enthalpie
I	Stromstärke
I₁, K₁	mod. Besselfunktionen 1. Ordnung
$\vec{j}$	Stromdichte
k	Ganghöhenzahl
L	Bogenleistung
Mk	Maeckersche Zahl
m	Moden-Index
n	Anzahl der Außenbereiche

P, g	Reihenentwicklungen u. Integralfunktionen
p	Druck
q	$:= \frac{4}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} - p$
R	Radius des Bogengefäßes
r_c	Radius des elektrisch leitfähigen Kanals
r, φ, z	Zylinderkoordinaten
S	Wärmestrompotential
s	komplexe Frequenz
S_a	$:= 30 \text{ W/cm}$
T	Temperatur
t	Zeit
V	elektrisches Potential
$\vec{v}$	Geschwindigkeit
$\vec{v}^n$	Eigenvektoren
w	$:= v_z + \frac{ik}{\alpha} \cdot S$
x_A	$:= a^2 - 1$
α	$:= \langle (\partial h / \partial (1/S_M)) \rangle_p$
Δ	Determinante, allgemein
Δ	Laplace-Operator
δ	radiale Verschiebung eines Punktes auf einer Bogenisothermen
ε	Auslenkung einer Bogenisothermen
η	dynamische Viskosität
κ	Wärmeleitfähigkeit
λ	Ganghöhe

μ_0	magnetische Feldkonstante
ρ	normierter Radius $r \cdot k$
ρ_m	Dichte
σ	elektrische Leitfähigkeit
τ	thermische Zeitkonstante
Ω	Anwachsrate
$\vec{\omega}$	$:= \text{rot } \vec{v}$
$o(n)n$	0 bis n mit Schrittweite 1
$:=$	ist Abkürzung für
$\forall$	für alle

8. Literaturverzeichnis

- /1/ J. Mentel, "Untersuchung der Wendelinstabilität an einem wandstabilisierten Wasserstoffbogen", Dissertation TH München (1969) und Z. Naturforsch. 26a, 526-538 (1971)
- /2/ K. Ragaller, "Physics of Arcs in Circuit Breakers", XIIIth Int. Conf. Phen. Ion. Gases, IL 251-268, Berlin (1977)
- /3/ P.C. Drop, E. Fischer, F. Oostvogels und G.A. Wesselink, "Gasentladungslampen mit Metallhalogenidzusatz", Philips techn. Rdsch. 35, 369-376 (1975/76)
- /4/ R.J. Zollweg, "Arc instability in mercury and metal halide arc lamps", J. IES 8, 90-94 (1979)
- /5/ J.A. Whitehead in "Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions", Hrsg. T. Riste, Plenum, New York (1975)
- /6/ W. Finkelnburg, "Hochstromkohlebogen" (Abschnitt über die Untersuchungen von P. Guillery), Springer-Verlag, Berlin (1948)
- /7/ S. Witkowski, "Das Wendeln des Hochstromkohlebogens", Z. Angew. Phys. 11, 135-142 (1959)
- /8/ P.J. Gaede, "Der wendelnde Wasserstoffbogen", Z. Physik 255, 40-58 (1972)
- /9/ S. Steinberger, "Messung von Temperaturverteilungen im H_2 -Kaskadenbogen bis 27 000 K", Z. Physik 223, 1-18 (1969)

- /10/ P.C. Müller u. W.O. Schiehlen, "Lineare Schwingungen", Akad. Verlagsges., Wiesbaden (1976)
- /11/ K.A. Ernst, J. Kopainsky und J. Mentel, "Der Einsatz der Wendelinstabilität in wandstabilisierten Lichtbögen", Z. Physik 265, 253-265 (1973)
- /12/ K. Ragaller, U. Kogelschatz und W.R. Schneider, "Über die Wendel-Instabilität eines konvektionsstabilisierten Hochstrom-Hochdruck-Lichtbogens", Z. Naturforsch. 28a, 1321-1328 (1973)
- /13/ K. Ragaller, "Investigations on Instabilities of Electric Arcs", Z. Naturforsch. 29a, 556-567 (1974)
- /14/ L.A. Afanasev, E.P. Pakhomov und P.E. Sychev, "Modell der helikalen Form des Lichtbogens" (Russisch; ins Deutsche übertragen von S. Pastor), Tepl. Vys. Temp. 16, 247-257 (1978)
- /15/ E.P. Pakhomov und P.E. Sychev, "Electromagnetic Interaction of a Helical Arc Current with its own Magnetic Field", High Temperature 17, 971-975 (1980)
- /16/ È.I. Asinovskii, A.K. Kuz'min und E.P. Pakhomov, "Measurement of Geometric Parameters of a Helical Arc", High Temperature 18, 8-13 (1980)
- /17/ J. Mentel, "Magnetische Instabilität von Lichtbögen" in "Der zwangsgekühlte Lichtbogen" (Russisch), Sowj. Akad. d. Wiss., Novosibirsk (1977)

- /18/ S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford at the Clarendon Press, Oxford (1961)
- /19/ H.H. Maecker, "Principles of Arc Motion and Displacement", Proc. IEEE 59, 439-449 (1971)
- /20/ K. Ragaller, W.R. Schneider und W. Hermann, "A Special Transformation of the Differential Equations Describing Blown Arcs", ZAMP 22, 920-931 (1971)
- /21/ W.I. Smirnow, "Lehrgang der höheren Mathematik", Teil III/1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1973)
- /22/ M. Braun, "Differentialgleichungen und ihre Anwendungen", Springer-Verlag, Berlin (1979)
- /23/ NAG Fortran Library Manual, Mark 8, Numerical Algorithms Group, Oxford (1981)
- /24/ U. Plantikow, "Bestimmung von Transportfunktionen aus den Charakteristiken zylindrischer Bögen (Wasserstoff)", Z. Physik 227, 271-290 (1969)
- /25/ F. Löblein, D. Ströle, "Dynamik der Lichtbogenstromregelung", Siemens-Zeitschrift 43, 472-477 (1969)
- /26/ F. Haase, Private Mitteilung
- /27/ F. Fröhr u. F. Orttensburger, "Einführung in die elektronische Regelungstechnik", Verlag Siemens AG, Berlin (1976)

- /28/ O. Zinke, "Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe", Springer-Verlag, Berlin (1965)
- /29/ A. Dreyer, "Entwicklung und Aufbau einer schnellen spannungsgesteuerten Stromquelle für Ströme bis zu ± 4 A zur Erzeugung variabler Magnetfelder im mT-Bereich", Diplomarbeit am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Elektrooptik, Ruhr-Universität Bochum (1982)
- /30/ V. Moersch, "Elektronische Verarbeitung optischer Messungen zur Bestimmung der geometrischen Form einer elektrischen Entladung", Diplomarbeit am Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Elektrooptik, Ruhr-Universität Bochum (1981)
- /31/ H. Unbehauen, "Regelungstechnik I", Vorlesungs-Manuskript, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum (SS 1979)
- /32/ T. Ebel, "Regelungstechnik", B.G. Teubner, Stuttgart (1973)
- /33/ H. Unbehauen, "Regelungstechnik II", Vorlesungs-Manuskript, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum (WS 1979/80)
- /34/ P.R. Bevington, "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences", McGraw Hill, New York (1969)
- /35/ N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, "Stability Theory by Liapunov's Direct Method", Applied Mathematical Sciences 22, Springer-Verlag, New York (1977)

LEBENS LAUF

Geburt 24. 4. 1946 in Bochum

Familienstand verheiratet seit 1971

Schulbildung 1963 Mittlere Reife,
1966 Abitur

Berufsausbildung

Mai 1966 - März 1969 Physikstudium mit den Nebenfächern
Mathematik und Chemie an der
Westfälischen Wilhelms-Universität
Münster

April 1969 - Jan. 1974 Physikstudium mit Nebenfach Elektronik
an der Ruhr-Universität Bochum;
Diplom-Prüfungen im Januar 1974

Berufspraxis

Sept. 1974 - Nov. 1977 Angestelltentätigkeit als Diplom-
Physiker im Bereich Silicium-Material-
entwicklung des Werks für Leistungs-
halbleiter der Siemens AG, München

Dez. 1977 - März 1978 Wissenschaftliche Hilfskraft und
Lehrbeauftragter im Fachbereich für
Experimentalphysik der Gesamthochschule
Paderborn

April 1978 - Dez. 1982 Wissenschaftlicher Angestellter in
der Arbeitsgruppe Grundlagen der
Elektrotechnik am Lehrstuhl für
Allgemeine Elektrotechnik und
Elektrooptik der Ruhr-Universität Bochum

